

令和 3 年 6 月 16 日現在

機関番号：12613

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05360

研究課題名(和文) 準周期軌道上パーコフ平均の高速計算とその応用

研究課題名(英文) Fast Computation of Birkhoff Average along a Quasi-periodic Orbit and its Applications

研究代表者

齊木 吉隆 (SAIKI, Yoshitaka)

一橋大学・大学院経営管理研究科・教授

研究者番号：20433740

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：決定論的力学系のダイナミクスは、周期軌道、準周期軌道、カオス軌道の3種類に分類されると考えられる。準周期軌道とは無理数回転と共役なふるまいであり、特に保存力学系における準周期軌道の重要性は良く知られていた。準周期軌道は回転数(無理数回転)、リアプノフ指数(ゼロリアプノフ指数)などを用いて特徴づけられるが、これらの量は準周期軌道上パーコフ平均として計算できる。本研究では準周期軌道上で定義される関数に対するパーコフ平均に関して、研究代表者らは、従来手法の1000倍程度以上(4倍精度の場合)の高速化を実現する重み付きパーコフ平均を提案してその有用性を複数の例で確認するとともに各種性質を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

回転数、リアプノフ数などをはじめとしてパーコフ平均は力学系の軌道に関するさまざまな量に関わっている。軌道長 $N$ のパーコフ平均の収束スピードは一般に $1/N$ のオーダーであり実際に計算で準周期性の判断をすることは困難であった。しかし、研究代表者らは、準周期軌道上のパーコフ平均に対しては、理論的には $1/N$ に関する任意の多項式よりも速く収束する重み付きパーコフ平均を提案してその応用可能性を示した。

研究成果の概要(英文)：The Birkhoff Ergodic Theorem concludes that time averages, that is, Birkhoff averages of a function  $f$  along an ergodic trajectory of a function  $T$  converges to the space average. Convergence of the time average to the space average is slow. We introduce a modified average by giving very small weights to the "end" terms. When  $(x_n)$  is a trajectory on a quasiperiodic torus and  $f$  and  $T$  are infinitely differentiable, we show that our weighted Birkhoff averages converge "super" fast, i.e. with error smaller than every polynomial of  $1/N$ . Our goal is to show that our weighted Birkhoff average is a powerful computational tool, and this study illustrates its use for several examples where the quasiperiodic set is one or two dimensional. In particular, we compute rotation numbers and conjugacies (i.e. changes of variables) and their Fourier series, often with 30-digit precision.

研究分野：応用数学

キーワード：力学系 準周期軌道 パーコフ平均 高速計算

## 1. 研究開始当初の背景

決定論的な力学系のダイナミクスは、周期軌道(不動点を含む)、準周期軌道、カオス軌道の3種類に分類されると考えられている。準周期軌道とは無理数回転と共役なふるまいであり、特に保存力学系における準周期軌道の重要性は良く知られていた。一方、散逸力学系においては乱流発生のシナリオ(Palis-Takensのシナリオ)などで注目されることはあったものの、ダイナミクスの理解のためにはそこまで重要視されていたとは言いがたい。研究代表者らは、不安定次元の異なる周期軌道が共存する2次元写像において、不安定な準周期軌道の存在が、ある種の時間間欠的なふるまいを引き起こすことを示唆する研究を得たがバーコフ平均の収束の遅さにより、準周期軌道の存在の判定が困難であることがわかった。

準周期軌道は回転数(無理数回転)、リアプノフ指数(ゼロリアプノフ指数)などを用いて特徴づけられる。これらの量は準周期軌道上(で定義される関数)のバーコフ平均と解釈することが可能である。準周期軌道上のバーコフ平均は、素朴に計算すると軌道長 $N$ に対して $N$ で $1/N$ のオーダーで収束する。これを高速化する試みはいくつか存在しており、最近では2014年に理論値で $1/N^7$ のオーダーで収束する改良方法が提案されていた。これを高速化させることが実用上期待される。研究代表者は、S. Das (George Mason University), E. Sander (George Mason University), J. A. Yorke (University of Maryland)らと共に実施した予備的研究において高速化のアイデアを思いつき、彼らとともにその手法や特徴を整備することとなった。

## 2. 研究の目的

準周期軌道はありふれているものの、その判定は困難であった。たとえばその特徴づけのひとつであるリアプノフ指数がゼロというものは実用上極めて判断が難しいものである。一方、リアプノフ指数はバーコフ平均であるが、その収束は一般に遅いことが知られており、その高速化は実用面から強く期待されていた。そこで理論と応用の双方の観点から高速化手法の研究に取り組むこととなった。

## 3. 研究の方法

研究代表者らが発案した準周期軌道上のバーコフ平均を高速で求める重み付きバーコフ平均の手法を整備し、それが応用可能となる対象を明確化することを目指した。重み付きバーコフ平均における用いるべき適切な $C$ 級重み関数は、準周期軌道上で定まる関数 $f$ の形に大きく依存すると予想された。そのため、複数の関数 $f$ を例として設定し、それに応じて適切な重み関数を探索した。また、ディオファントス条件が実用計算上、高速化にどの程度影響するかを明らかにすることも実用上重要であった。一部の観測時系列から準周期軌道を判定する手法やフーリエ級数展開に対する応用など、重み付きバーコフ平均の応用例を多数見出すことも目標となった。

## 4. 研究成果

研究代表者らは準周期軌道上のバーコフ平均計算において収束の遅さは軌道の最初と最後の影響が大きいことに由来していることを見出し、 $C$ 級の重み関数を用いることによって、理論値で $1/\{N$ の任意の多項式 $\}$ より早い収束をする重み付きバーコフ平均を考案し、それに纏わる性質を詳しく調べて論文としてまとめた。いくつかの例に適用したところ、倍

精度数値計算で  $1/N^{15}$  程度、4 倍精度数値計算で  $1/N^{25}$  程度のオーダーの収束過程 ( $N$  が  $10^5 \sim 10^8$  における収束過程) が確認でき、実用上も重み付きパーコフ平均が有効であることを明らかにした。また、研究代表者らは重み付きパーコフ平均が準周期軌道上で定義される関数のフーリエ級数計算にも適用した。例えば、ある種の複素力学系の写像反復によって発散しない集合 (ジークル円盤) に含まれる準周期軌道が作る一見 “ギザギザ” した集合の滑らかさを、重み付きパーコフ平均を用いたフーリエ級数計算によって確認出来るようになった。

重み付きパーコフ平均の他の応用例、例えば、初期値空間においてカオス軌道と準周期軌道を分離する際にも多くの初期値で計算を実行する必要が出てくる。このような応用に向けて、重み付きパーコフ平均の更なる計算の高速化が期待されたため、重み付きパーコフ平均で用いる  $C$  級の重み関数として  $w(t) = (-1/(t^p(1-t)^p))$  ( $0 < t < 1$ ),  $0$  (その他) という形に限定して倍精度ならびに 4 倍精度計算の場合に計算速度を調べてみたところ、軌道長  $N$  が小さい状況下 (倍精度計算が有効な範囲) では  $p=1$  が適しており、 $N$  が大きい状況下 (4 倍精度計算が有効な範囲) では  $p=2$  が適していることをいくつかの例で確認し、重み関数を上記の形に限定した場合でも  $p$  の値によって数倍から 10 倍程度の計算速度差が生まれることがわかった。このように重み関数の選び方は、パーコフ平均計算における負荷が多い問題に取り組む際には重要なポイントとなる。

また、観測時系列の種類は時系列の背後に存する力学系の次元よりも少ないことが多い。そのような場合に観測時系列の時間遅れ埋め込みと重み付きパーコフ平均を用いることで、射影された準周期的な観測時系列データから回転数を高精度で同定する手法を開発した。

以上で得た結果は主に S. Das (George Mason University (論文発表時は Courant Institute, New York University)), E. Sander (George Mason University), J. A. Yorke (University of Maryland) との共同研究として論文 2,3,8 としてまとめられた。

以下が本科研費研究の援助によって得た研究成果がまとめられた論文である。

1. K. Nakai and Y. Saiki, Machine-learning construction of a model for a macroscopic fluid variable using the delay-coordinate of a scalar observable, *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S* 14 (3), 1079-1092, 2021 (published Mar). <https://doi.org/10.3934/dcdss.2020352>  
<https://arxiv.org/pdf/1903.05770>
2. S. Das, Y. Saiki, E. Sander and J. A. Yorke, Solving the Babylonian Problem of quasiperiodic rotation rates, *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S* 12 (8), 2279-2305, 2019 (published online Jan 6). <https://doi.org/10.3934/dcdss.2019145> <https://arxiv.org/abs/1706.02595>
3. Y. Saiki and J. A. Yorke, Quasiperiodic orbits in Siegel disks/balls and the Babylonian problem, *Regular and Chaotic Dynamics* 23 (6), 735-750, 2018 (published Nov 29). <https://doi.org/10.1134/S1560354718060084>  
<https://arxiv.org/abs/1811.03148>
4. Y. Saiki, M.F. Sanjuan and J. A. Yorke, Low-dimensional paradigms for high-dimensional hetero-chaos, *Chaos* 28 (10), 103110:1-7, 2018 (published online Oct 18). <https://doi.org/10.1063/1.5045693> <https://arxiv.org/abs/1806.09609>
5. K. Nakai and Y. Saiki, Machine-learning inference of fluid variables from data using reservoir computing, *Physical Review E* 98 (2), 023111:1-6, 2018 (published online Aug 31). <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.023111>  
<https://arxiv.org/abs/1805.09917>
6. N. Nakano, M. Inatsu, S. Kusuoka and Y. Saiki, Empirical evaluated SDE modelling for dimensionality reduction systems and its predictability estimates, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics* 35 (2), 553-589, 2018 (published online Feb 23/ published July).

- <https://doi.org/10.1007/s13160-017-0296-2>
7. K. Esashi, T. Onozaki, Y. Saiki and Y. Sato, Intermittent transition between synchronization and desynchronization in multi-regional business cycles, *Structural Change and Economic Dynamics* 44, 68-76, 2018 (published March 17). <https://doi.org/10.1016/j.strueco.2017.10.005>
  8. S. Das, Y. Saiki, E. Sander and J. A. Yorke, Quantitative Quasiperiodicity, *Nonlinearity* 30 (11), 4111-4140, 2017 (published October 11). <https://doi.org/10.1088/1361-6544/aa84c2> <https://arxiv.org/abs/1601.06051>
  9. M. U. Kobayashi and Y. Saiki, Network analyses of chaotic systems through unstable periodic orbits, *Chaos* 27 (8), 081103:1-6, 2017 (published August 23). <https://doi.org/10.1063/1.4995043>
  10. Y. Saiki, E. Sander and J. A. Yorke, Generalized Lorenz Equations on a Three-Sphere, *European Physical Journal Special Topics* 226 (9), 1751-1764, 2017 (published June 21). <https://doi.org/10.1140/epjst/e2017-70055-y>

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 5件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 K. Nakai and Y. Saiki	4. 巻 14
2. 論文標題 Machine-learning construction of a model for a macroscopic fluid variable using the delay-coordinate of a scalar observable	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S	6. 最初と最後の頁 1079-1092
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcdss.2020352	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 S. Das, Y. Saiki, E. Sander and J. A. Yorke	4. 巻 12
2. 論文標題 Solving the Babylonian Problem of quasiperiodic rotation rates	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S	6. 最初と最後の頁 2279-2305
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcdss.2019145	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Y. Saiki and J. A. Yorke	4. 巻 23
2. 論文標題 Quasiperiodic orbits in Siegel disks/balls and the Babylonian problem	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Regular and Chaotic Dynamics	6. 最初と最後の頁 735-750
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1134/S1560354718060084	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Y. Saiki, M. F. Sanjuan and J. A. Yorke	4. 巻 28
2. 論文標題 Low-dimensional paradigms for high-dimensional hetero-chaos	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Chaos	6. 最初と最後の頁 103110:1-7
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5045693	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Nakai and Y. Saiki	4. 巻 98
2. 論文標題 Machine-learning inference of fluid variables from data using reservoir computing	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Physical Review E	6. 最初と最後の頁 023111:1-6
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevE.98.023111	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S. Das, Y. Saiki, E. Sander and J. A. Yorke	4. 巻 30
2. 論文標題 Quantitative quasiperiodicity	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 4111-4140
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6544/aa84c2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 N. Nakano, M. Inatsu, S. Kusuoka and Y. Saiki	4. 巻 35
2. 論文標題 Empirical evaluated SDE modelling for dimensionality reduction systems and its predictability estimates	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 553-589
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-017-0296-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Esashi, T. Onozaki, Y. Saiki and Y. Sato	4. 巻 44
2. 論文標題 Intermittent transition between synchronization and desynchronization in multi-regional business cycles	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Structural Change and Economic Dynamics	6. 最初と最後の頁 68-76
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.strueco.2017.10.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 M. U. Kobayashi and Y. Saiki	4. 巻 27
2. 論文標題 Network analyses of chaotic systems through unstable periodic orbits	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Chaos	6. 最初と最後の頁 081103:1-6
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.4995043	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y. Saiki, E. Sander and J. A. Yorke	4. 巻 226
2. 論文標題 Generalized Lorenz Equations on a Three-Sphere	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 European Physical Journal Special Topics	6. 最初と最後の頁 1751-1764
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1140/epjst/e2017-70055-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計7件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 齊木吉隆
2. 発表標題 ヘテロカオス
3. 学会等名 Advancing Interaction among mathematical concepts and methods towards practical problems 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 齊木吉隆
2. 発表標題 ヘテロカオスと間欠性
3. 学会等名 現象と数理モデル2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Nakai and Y. Saiki
2. 発表標題 機械学習に基づいた流体マクロ変数に関する数理モデル構築ならびに時間発展予測
3. 学会等名 理論応用力学講演会 AIMaP 数学応用セッション (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Nakai and Y. Saiki
2. 発表標題 流体マクロ変数に関する数理モデルの機械学習に基づく構築
3. 学会等名 Prometech Simulation Conference (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Nakai and Y. Saiki
2. 発表標題 Machine-learning inference of variables of a chaotic fluid flow from data using reservoir computing
3. 学会等名 NOLTA2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Nakai and Y. Saiki
2. 発表標題 Machine-learning prediction of fluid variables
3. 学会等名 Boston University/ Keio University Workshop 2018 Dynamical systems (国際学会)
4. 発表年 2018年



1. 発表者名 K. Nakai and Y. Saiki
2. 発表標題 Machine-learning construction of a model for a macroscopic fluid variable using the delay-coordinate of a scalar observable
3. 学会等名 George Mason University Applied and Computational Mathematics Seminar (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

研究代表者のホームページ <a href="http://saiki.hub.hit-u.ac.jp/">http://saiki.hub.hit-u.ac.jp/</a> Page of Yoshitaka SAIKI <a href="http://saiki.hub.hit-u.ac.jp/">http://saiki.hub.hit-u.ac.jp/</a> <a href="http://www.cm.hit-u.ac.jp/~saiki/">http://www.cm.hit-u.ac.jp/~saiki/</a>
--

6. 研究組織			
	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
	米国	University of Maryland	Courant Institute, New York University
スペイン	Universidad Rey Juan Carlos		