

令和 2 年 5 月 29 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05362

研究課題名(和文) 動的計画的手法による経路依存型制御の研究

研究課題名(英文) Studies of path-dependent controls by dynamic programming methods

研究代表者

貝瀬 秀裕 (Kaise, Hidehiro)

大阪大学・基礎工学研究科・准教授

研究者番号：60377778

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：最適制御理論では系の状態を所与の基準に基づいて最適化することを目標とする。通常の最適制御では、現時刻の状態のみで未来の状態が決定されると仮定する。一方で、未来の状態が過去の状態履歴に依るとする経路依存系に対する最適制御の研究が、理論と応用面から注目を集めている。本研究では、経路依存系における最適制御問題に対する動的計画的手法の研究を行い、主に経路依存動的計画原理に関連する経路依存型動的計画方程式に関する研究成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

経路依存系に対する動的計画法は過去の状態履歴を初期状態とするため、通常の動的計画法とは根本的に異なり、新たな数学理論の展開が必要となる。本研究の主要な研究成果は、経路依存系における経路依存型動的計画偏微分方程式に対する粘性解と呼ばれる弱解理論の発展、また経路依存確率制御における動的計画法に関連する基本方程式の導出や解析などである。これらの研究成果は、経路依存系に対する最適問題の研究の基盤を与えるもので、工学、物理学などの自然科学、経済などの社会科学における経路依存現象を最適化する問題に応用できると期待される。

研究成果の概要(英文)：A goal of optimal control theory is to optimize state of systems under given criteria. It is assumed that the future state of the system is determined by the current state in the usual optimal control. On the other hand, optimal controls for path-dependent systems, which suppose the future state depends on the history of the past state, attracts attention from view points of theories and applications. In this research project, we studied dynamic programming methods for optimal control problems in path-dependent systems and mainly obtained results on path-dependent dynamic programming equations related to path-dependent dynamic programming principles.

研究分野：最適制御

キーワード：決定論的制御 確率制御 動的計画法 HJB偏微分方程式 粘性解 冪等代数的手法

1. 研究開始当初の背景

通常の制御理論では、系の状態は常微分方程式や確率微分方程式を用いて記述されることが多い。このような系の特徴は、瞬間的な未来の状態が現時刻の状態決定されるという所謂マルコフ的な系であることである。一方で、遅延系や経路依存オプションなどに見られるように、系の状態が過去の状態履歴にも依存したり、またコスト関数が状態経路に依存するような最適制御問題の重要性が実務分野において増していた。そのような状況を背景に、経路依存系における最適制御を扱うための数学理論の構築の機運が国外を中心に高まっていた。

研究開始当初の国外の経路依存系の研究状況として、まずロシアの研究者らによる決定論的制御の研究が挙げられる。彼らは遅延系などに対して有効であることが知られている Kim の共不変微分 (co-invariant derivative) を、状態履歴がなす無限次元空間上の微分概念に据え、1 階の経路依存型 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 偏微分方程式の粘性解理論を展開した。一方で、研究開始当時、米国、フランス、中国などの後退確率微分方程式の研究者らにより、確率的経路依存系に対する解析学が展開され始めた。彼らは Dupire による微分概念と汎関数型伊藤公式を動機として、非線形期待値に基づく粘性解理論を提唱し、経路依存型確率制御における HJB 偏微分方程式を含む 2 階の経路依存型偏微分方程式の研究を進展させていた。

2. 研究の目的

マルコフ的系に対する最適制御において、Bellman の動的計画法は重要な手法の一つである。経路依存系は過去の状態履歴に関する記憶性を持つことから、マルコフ的動的計画法を直ちに適用できない。そのため、経路依存系に対しては新たな動的計画法を展開する必要がある。本研究の目的は、重要とされる具体的なモデルや問題を念頭に、経路依存系における最適制御問題に対する動的計画法の基礎研究を行うことである。詳しくは、経路依存系の最適制御における経路依存型動的計画原理やそれから導出される経路依存型動的計画方程式の理論的研究を行う。経路依存型動的計画方程式に対する数値解法に向けた研究も行う。

3. 研究の方法

通常のマルコフ的系の最適制御における動的計画原理は、値関数に関連して定義される動的計画半群と呼ばれる非線形半群を用いて記述できる。先に述べたように、経路依存系は記憶性をともなう系であるため、普通の意味での半群を導出することはできない。そこでマルコフ的系の値関数に相当するものとして、初期時刻から現時刻までの状態経路を初期状態とみなすことで、状態経路空間を定義域とする値汎関数を定義する。すると、値汎関数に対応する作用素を導入することができ、現時刻でパラメータ付けされているこの作用素の族は半群性と類似の性質を持つ。この作用素の族を経路依存動的計画半群と呼び、これを基盤に様々な経路依存系の問題の研究を進める。

4. 研究成果

(1) 微小確率経路依存事象の動的重点サンプリングに関連する経路依存型 Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の研究

微小確率事象のモンテカルロ法ではその事象が起こりにくいこと、所与の近似誤差を達成するためには非常に多くのサンプルを発生させる必要がある。重点サンプリング法とは、測度変換を用いて比較的起こりやすい代替事象を構成し、元の事象の代わりに代替事象のサンプルで近似値を計算する手法であり、代替事象の分散が小さいほど所与の近似誤差を達成するためのサンプル数が少なく済む。大偏差理論における Cramer の定理に関連する微小確率事象に対する重点サンプリングでは、代替サンプルの漸近的分散は下限を持ち、この下限は Hamilton-Jacobi 偏微分方程式で特徴付けられることが知られている。また、この Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解を用いると、漸近的分散の下限を達成する動的測度変換による重点サンプリングスキームが(少なくとも形式的には)構成できる。

本研究では、大偏差理論における Mogulskii の定理に現れる微小確率経路依存事象に対する動的重点サンプリング法に関連する経路依存型 Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の研究を行った。元の分布が正規分布に従う場合を含む条件の下では、経路依存型 Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の非線形項が解の 1 階導関数に関して優線形増大性 (super linear growth) を持つため、既存の経路依存型粘性解の概念と結果を適用できない。漸近的分散の下限に対応する値汎関数の正則性を精緻に調べることで粘性解の概念を適切に拡張し、この値汎関数を経路依存型

Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の一意的な粘性解として特徴付けた。この特徴付けにより、経路依存型 Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解や近似解を用いた動的サンプリング測度変換の構成の研究の進展が見込まれる。

(2) 2 次増大 Hamiltonian を持つ経路依存型 Isaacs 偏微分方程式の離散時間近似の研究

マルコフ的な系に対する微分ゲームにおける値関数は、Isaacs 偏微分方程式の粘性解として特徴付けられる。また、系を記述する常微分方程式を Euler 法などで離散時間近似することで離散時間動的ゲームを考えることができ、離散時間動的ゲームの値関数は Isaacs 偏微分方程式の粘性解に収束する。数値解析の観点からは、離散時間動的計画法により計算できる離散時間動的ゲームの値関数で、Isaacs 偏微分方程式の粘性解が近似できることを意味する。

本研究では、ベクトル場やコスト関数が状態経路に依存する微分ゲームを考え、経路依存型 Isaacs 偏微分方程式の粘性解の離散時間近似の研究を行なった。特に、線形 2 次制御を含むような条件のもとで研究を行なった。通常の粘性解における単調スキーム (monotone scheme) の考えを経路依存の場合に適用することで、離散時間経路依存動的ゲームの値関数が、経路依存型 Isaacs 偏微分方程式の粘性解に収束することを示した。経路依存線形 2 次制御を含むような条件の下では制御領域は非有界で、Isaacs 偏微分方程式の非線形項である Hamiltonian は解の 1 階導関数項や状態経路の sup ノルムについて 2 次増大性を持ち、既存の結果を用いることはできない。値関数の詳細な性質を調査することで 2 次増大性に関連した粘性解の概念を導入し、上記の離散時間問題の収束に関する結果を示すことができた。離散時間経路依存線形 2 次制御の値関数は、離散時間 Riccati 方程式を一般化した漸化式を用いた明示的な表現を持つことから、この明示解を組み合わせることで経路依存型 Isaacs 偏微分方程式の近似解が構成できることが期待される。

(3) 部分可観測離散時間リスク鋭感的確率制御の研究

完全可観測な場合の連続時間経路依存型最適制御の研究は発展しているが、部分可観測な場合の研究は未だなされていない。その理由を部分可観測確率最適制御を例に考えてみると、経路依存系ではマルコフ性の欠如により初期状態が初期時刻から現時刻までの状態経路となるので、それを知った上で現時刻から未来の状態経路の条件付き分布を計算する必要である。しかし、そのような条件付き分布のダイナミクスを厳密に導出し意味付けることは困難である。

本研究では、この困難な点を回避するために離散時間の枠組みに焦点を絞り、部分可観測離散時間リスク鋭感的確率制御の研究を行なった。連続時間のマルコフ的な系に対する部分可観測リスク鋭感的確率制御の手法を動機として、離散時間 Girsanov の定理を用いることで、現時刻から終末時刻までの状態経路の条件付き分布 (information state と呼ぶ) が満たすダイナミクスを導出した。すると、部分可観測問題は information state を新しい状態とする完全可観測な経路依存確率制御問題として定式化され、完全可観測経路依存動的計画法により、最適制御と予測器の構成に成功した。この結果は離散時間特有であるが、部分可観測の連続時間経路依存確率制御の研究の方向性に示唆を与えるものと考えられる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 H.Kaise, T.Kato and Y.Takahashi | 4. 巻 1 |
| 2. 論文標題 Hamilton-Jacobi partial differential equations with path-dependent terminal costs under superlinear Lagrangians | 5. 発行年 2018年 |
| 3. 雑誌名 23rd International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems | 6. 最初と最後の頁 692-699 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 7件）

| |
|--|
| 1. 発表者名 H. Kaise |
| 2. 発表標題 Path-dependent Hamilton-Jacobi-Bellman PDEs and approximations on finite-dimensional spaces |
| 3. 学会等名 SIAM Conference on Control and its Applications（国際学会） |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 H.Kaise, T.Kato and Y.Takahashi |
| 2. 発表標題 Hamilton-Jacobi partial differential equations with path-dependent terminal costs under superlinear Lagrangians |
| 3. 学会等名 23rd International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems（国際学会） |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 H.Kaise |
| 2. 発表標題 Hamilton-Jacobi partial differential equations with path-dependent terminal costs under superlinearly growing Lagrangians |
| 3. 学会等名 Workshop on Stochastics in honor of Prof. Shuenn-Jyi Sheu（招待講演）（国際学会） |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 H.Kaise |
| 2. 発表標題 Partially observed risk-sensitive control of path-dependent discrete-time systems |
| 3. 学会等名 Stochastic control, Computational Methods, and Applications (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 H. Kaise |
| 2. 発表標題 Convergence of discrete-time deterministic controls to path-dependent HJB partial differential equations with quadratically growing Hamiltonians |
| 3. 学会等名 SIAM Conference on Control and its Applications (国際学会) |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 H. Kaise |
| 2. 発表標題 Convergence of discrete-time deterministic controls to path-dependent HJB PDEs with quadratically growing Hamiltonians |
| 3. 学会等名 Nonlinear Partial Differential Equations - Optimal Control and PDE (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 H. Kaise |
| 2. 発表標題 Discrete-time risk-sensitive control of path-dependent systems under partial observations |
| 3. 学会等名 Workshop on Stochastic Control and Related Issues (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|--|---------------------------|-----------------------|----|
|--|---------------------------|-----------------------|----|