

令和 4 年 5 月 27 日現在

機関番号：32683

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05422

研究課題名(和文) グラフ理論を用いた箆ゲージ理論の解析と新しい時空像の探求

研究課題名(英文) Analysis of quiver gauge theory via graph theory and search for a novel space-time picture

研究代表者

太田 和俊(Ohta, Kazutoshi)

明治学院大学・法学部・教授

研究者番号：80442937

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：有向グラフ上で定義された箆ゲージ理論をグラフ理論を用いて解析を行なった。特に、2次元超対称ゲージ理論に対して、分配関数を局所化の方法を用いて厳密に評価し、箆ゲージ理論における渦糸(ヴォーテックス)のモジュライ空間に関する新しい知見を得た。また、2次元のリーマン面を分割した離散空間上の超対称ゲージ理論を箆ゲージ理論の一種としてとらえ、その理論の構成および量子異常に対するゼロモードの寄与などの位相幾何学的な性質を、グラフ理論を用いて連続理論との対応を含め明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

頂点同士を向きを持った矢印で結ぶ有向グラフによって箆ゲージ理論と呼ばれるタイプのゲージ理論を定義できる。一方、有向グラフ含むグラフ一般を扱う数学の道具としてグラフ理論がある。箆ゲージ理論がグラフを用いて定義される以上、グラフ理論を用いた解析を行うことができるものと期待されるが、これまで箆ゲージ理論に対してグラフ理論を積極的に活用することはあまり行われてこなかった。本研究は、物理的な解釈や連続理論との関係を含め、箆ゲージ理論の構成と解析においてグラフ理論が非常に有効であることを示すものである。

研究成果の概要(英文)：We analyze quiver gauge theories defined on directed graphs using graph theory. In particular, for two-dimensional supersymmetric gauge theory, the partition function is exactly evaluated by the localization method, and new knowledges about the moduli space of the vortices in the quiver gauge theory are obtained. We also consider supersymmetric theory on the discretized space-time divided by the two-dimensional Riemann surface, which can be regarded as a kind of the quiver gauge theory. Using graph theory, we clarify the construction of the quiver gauge theory and topological properties such as the zero mode contribution to the anomalies, including the relation to the continuum theory.

研究分野：超対称ゲージ理論

キーワード：超対称ゲージ理論 箆ゲージ理論 グラフ理論 局所化定理 格子ゲージ理論

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 簾ゲージ理論はオービフォールド上の D ブレインやブレイン構成法における有効理論として現れ、その理論の解析は幾何学や代数学との結びつきも含め様々な広がりを持っている。その簾ゲージ理論は、グラフの頂点にゲージ群、頂点同士を結ぶ辺上に両端のゲージ群に対する双基本表現の物質場を対応させることで理論を定義することができる。すなわち、有向グラフを与えることによって物質場の表現を含めた理論の構造を決定することができる。このような有向グラフを数学的に扱う方法としてグラフ理論が知られているが、本研究開始当初では、簾ゲージ理論とグラフ理論との関係は明確ではなかった。特に、グラフ理論が簾ゲージ理論を含む超対称ゲージ理論や超弦理論に果たす役割について、明確にする必要があった。

(2) 時空を離散化することによって正則化を行う格子ゲージ理論では、理論が定義される離散空間は通常正方格子を用いることが多い。特に、超対称性を離散空間上に構成する方法の一つである杉野模型は 2 次元の正方格子を用いている。引用文献 にあげた研究では、杉野模型を正方格子ではなく、2 次元リーマン面を自由に分割した格子(多面体)上に一般化して構成することに成功している。このリーマン面を分割した離散空間上でのゲージ理論は、簾ゲージ理論の一種として理解することができるが、この一般化された杉野模型が一般的な簾ゲージ理論と同様にグラフ理論を用いて解析可能か、あるいはグラフ理論が有効な道具として使えるのか興味が生じていた。

## 2. 研究の目的

(1) 簾ゲージ理論が有向グラフを用いてその構造を決定できる以上、その解析においてグラフ理論が有効であることが期待される。したがって、まずはゲージ理論として深い理解が得られている 2 次元の超対称ゲージ理論を対象を絞り、ゲージ群と物質場を有効グラフによって規定された 2 次元超対称簾ゲージ理論として構成する。その 2 次元超対称簾ゲージ理論を局所化の方法を使って解析し、グラフ理論との関連を見出す。特に、超対称ゲージ理論では、渦糸(ヴォーテックス)といったソリトンが重要な役割を演じるが、簾ゲージ理論で定義された渦糸の解空間(モジュライ空間)の性質についてもグラフ理論を通じた研究を行う。

(2) 2 次元リーマン面を分割した離散空間上で定義された一般化された杉野模型について、その分割と対応したグラフ理論を用いて解析を行う。特に、グラフ理論の離散空間を行列に対応させて扱う手法を活用し、理論の再構築と量子異常を含めた量子論的性質を明らかにする。

(3) 連続時空上で定義された簾ゲージ理論、離散空間上で定義された格子ゲージ理論、それら双方のグラフ理論を用いた解析から、離散から連続に繋がる時空像について新しい知見を得る。

## 3. 研究の方法

(1) 2 次元超対称簾ゲージ理論および一般化された杉野模型をグラフ理論の言葉を使って構成する。特に、隣接行列や接続行列といった離散空間であるグラフを行列の構造として表現するグラフ理論の手法を用いて、理論の再構築を行う。

(2) グラフ理論に現れる手法について物理的な解釈を確立する。

(3) 局所化の方法(局所化定理)を使って、理論の分配関数などを厳密に評価する。その結果に対してグラフ理論からの理解を与える。

## 4. 研究成果

(1) 2 次元超対称簾ゲージ理論の研究を行う前に、リーマン面上で定義された 2 次元超対称ゲージ理論についてより深い理解が必要となった。特に、局所化の方法を使って理論を解析した際に、得られた分配関数の評価が物理的・数学的にどのような意味を持つのか明確にする必要があった。この予備的な研究では、物質場を含むカイラル多重項中のスカラー場が期待値を持つヒッグス相と、ゲージ場を含むベクトル多重項中のスカラー場が期待値を持つクーロン相のそれぞれにおいて、局所化の方法を用いて同じ物理量の異なる解釈(表式)を得ることができた。

まず、ヒッグス相における局所化では、フェルミオンにゼロモードが存在するため、フェルミオンの双線型形式(質量項)を含んだある種の超対称演算子を挿入する必要がある。その演算子は、2 次元超対称ゲージ理論における BPS 渦糸の解空間の体積を与えるものになっていることを明確に示すことができた。一方、クーロン相における局所化では、最終的にベクトル多重項中のスカラー場の固有値空間上での多重積分まで簡約化されるが、その積分を留数計算として評価することによって、ヒッグス相での解釈から期待される BPS 渦糸の解空間の体積についての厳密な結果を得ることができた。

この研究成果は、その後の研究における物理的な解釈と理解に対する大きな基盤となった。

(2) 2次元のリーマン面上の超対称ゲージ理論のゲージ群と物質場を簡ゲージ理論に拡張し、解析を行った。特に、理論における超対称変換や拘束条件などはグラフ理論における接続行列を用いて表すと非常に簡明かつ扱いやすい形式で理論を構成できることがわかった。また、この理論でも重要な働きをする BPS 渦糸についても、グラフ上に定義されたより広いクラスの微分方程式系として表すことができる。

この超対称簡ゲージ理論についても、ヒッグス相とクーロン相の双方において局所化の方法を用いた解析を行った。グラフ理論の手法を用いて理論を構成できたおかげで、(1)の研究成果の多くの部分をそのまま利用することができ、見通しの良い表式と結果を得ることができた。

この成果は、一般のグラフ上に拡張された BPS 渦糸系について、その解空間の体積を積分公式として厳密に与えたことになっており、物理的・数学的の双方の観点から全く新規の結果となっている。また、グラフの頂点に与えられたゲージ群の一部に対して強結合領域を考えると、非線形シグマ模型における BPS 渦糸系の解空間の体積も厳密に評価できることがわかった。

(3) 2次元のリーマン面を自由に分割して得られた離散空間と有向グラフを対応させ、その上に一般化された超対称ゲージ理論(杉野模型)を構築した。その理論の超対称変換および作用はグラフ理論における接続行列で表現される。グラフ理論では、接続行列の2乗はラプラシアン行列として知られているが、これはまさしく連続空間におけるラプラシアンに相当し、接続行列はその平方根、すなわちディラック演算子に相当することがわかる。連続空間上の場の理論では、ディラック演算子の核はゼロモードと呼ばれ、場の理論における量子異常などで重要な役割も演じるが、グラフ上に定義されたゲージ理論においても接続行列の核が量子異常に対して重要な役割を持つことを見出した。グラフ理論を用いることで連続理論と同様の位相幾何学的な解析や手法が使えることがわかったのである。特に、トーラスといった平坦空間の正方格子で考える通常の格子ゲージ理論と異なり、様々な種数を持ったリーマン面の離散空間(多面体)上で、そのトポロジー(オイラー標数)に応じてゼロモードや量子異常の振る舞いの変化することがわかった。

このグラフ上の超対称ゲージ理論においても(1)の研究成果と同様に局所化の方法を使って解析を進めることができ、特にクーロン相において、連続理論と同様、ベクトル多重項中のスカラ一場の固有値空間(ゼロモード)上での多重積分まで簡約化されることを見出した。

この研究成果はグラフ上の接続行列を離散空間上の差分演算子として積極的に解釈・活用し、グラフの位相幾何学的な側面まで含めて場の理論として扱った初めての例となると思われる。

#### <引用文献>

So Matsuura, Tatsuhiro Misumi, Kazutoshi Ohta, “ Topologically twisted  $N=(2,2)$  supersymmetric Yang–Mills theory on an arbitrary discretized Riemann surface”, PTEP 2014 (2014) 12, 123B01.

So Matsuura, Tatsuhiro Misumi, Kazutoshi Ohta, “ Exact Results in Discretized Gauge Theories”, PTEP 2015 (2015) 3, 033B07.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 3件）

|   |                      |
|---|----------------------|
| 1. 著者名<br>Kazutoshi Ohta and Norisuke Sakai             | 4. 巻<br>2021         |
| 2. 論文標題<br>The volume of the quiver vortex moduli space | 5. 発行年<br>2021年      |
| 3. 雑誌名<br>Prog. Theor. Exp. Phys.                       | 6. 最初と最後の頁<br>033B02 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1093/ptep/ptab012         | 査読の有無<br>有           |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている（また、その予定である）                   | 国際共著<br>-            |

|   |                      |
|---|----------------------|
| 1. 著者名<br>Kazutoshi Ohta and Norisuke Sakai   | 4. 巻<br>2019         |
| 2. 論文標題<br>Higgs and Coulomb branch descriptions of the volume of the vortex moduli space | 5. 発行年<br>2019年      |
| 3. 雑誌名<br>Progress of Theoretical and Experimental Physics                                | 6. 最初と最後の頁<br>043B01 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1093/ptep/ptz016  | 査読の有無<br>有           |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている（また、その予定である）   | 国際共著<br>-            |

|  |                      |
|--|----------------------|
| 1. 著者名<br>Matsuura So, Ohta Kazutoshi                      | 4. 巻<br>2022         |
| 2. 論文標題<br>Supersymmetric gauge theory on the graph        | 5. 発行年<br>2022年      |
| 3. 雑誌名<br>Progress of Theoretical and Experimental Physics | 6. 最初と最後の頁<br>043B01 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1093/ptep/ptac018            | 査読の有無<br>有           |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている（また、その予定である）                      | 国際共著<br>-            |

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 1件/うち国際学会 1件）

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Kazutoshi Ohta   |
| 2. 発表標題<br>Graph theory and Lattice theory  |
| 3. 学会等名<br>Discrete Approaches to the Dynamics of Fields and Space-Time, APCTP, Korea（招待講演）（国際学会） |
| 4. 発表年<br>2017年   |

|                             |
|-----------------------------|
| 1. 発表者名<br>太田和俊             |
| 2. 発表標題<br>グラフ上の超対称ゲージ理論    |
| 3. 学会等名<br>日本物理学会 2017年秋季大会 |
| 4. 発表年<br>2017年             |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>鎌田翔, 松浦壮, 三角樹弘, 太田和俊                            |
| 2. 発表標題<br>Topological Operators in 2D N=(2,2) Lattice SYM |
| 3. 学会等名<br>日本物理学会 2017年秋季大会                                |
| 4. 発表年<br>2017年  |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| 氏名<br>(ローマ字氏名)<br>(研究者番号) | 所属研究機関・部局・職<br>(機関番号) | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
|                           |                       |    |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|         |         |