

令和 5 年 5 月 16 日現在

機関番号：13802

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05572

研究課題名(和文) 輻射輸送方程式の解析解

研究課題名(英文) Analytical solutions of the radiative transport equation

研究代表者

町田 学 (Machida, Manabu)

浜松医科大学・光先端医学教育研究センター・指定講師

研究者番号：40396916

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：解析解を利用した輻射輸送方程式の数値手法を提案し、また非整数階の時間微分を持つ新奇な輻射輸送方程式に対しても研究を行った。さらに、多孔質媒体を水に混ぜて移動する分子の輸送の支配方程式が輻射輸送方程式であることを明らかにした。逆問題の観点からも研究を実施し、乱数を用いる方法や、空間周波数領域の測定に対応する光トモグラフィーの数値手法の提案などを行った。前者では拡散近似を施すことにより拡散方程式に対する逆問題に帰着させた。後者では解析解を利用することにより、輻射輸送方程式そのものに対する係数決定逆問題の数値手法を作った。輻射輸送方程式を用いた光学特性値の決定も行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多孔質媒体中の分子輸送の支配方程式が輻射輸送方程式であることが明らかになったが、この研究は土壌汚染の問題などに波及効果がある。光トモグラフィーにおいて、輻射輸送方程式の利用は困難であるとされており、拡散近似によって得られる拡散方程式の逆問題として定式化される。今回、解析解を利用することにより輻射輸送方程式の高速な数値手法が確立し、それを用いた逆問題の解法の開発も行った。これにより、光トモグラフィーの分野に新たな展開が期待できる。

研究成果の概要(英文)：A numerical method for the radiative transport equation using analytical solutions was proposed. In addition, a novel radiative transport equations with fractional-order time derivatives was studied. Furthermore, we revealed that the radiative transport equation is the governing equation for the transport of molecules in water which move in porous media. Related inverse problems were studied. A numerical method with random numbers was proposed for optical tomography. A numerical method was developed for measurements in the spatial frequency domain. In the former, the problem was reduced to an inverse problem for the diffusion equation by the diffusion approximation. In the latter, by using analytical solutions, we created a numerical method for the inverse problem of determining coefficients of the radiative transport equation. Parameter estimation was done using the radiative transport equation.

研究分野：物理応用数学

キーワード：輻射輸送方程式 線型ボルツマン輸送 光トモグラフィー

1. 研究開始当初の背景

輻射輸送方程式は線形のボルツマン方程式である。雲や霧、星間物質、生体組織などのランダム媒質中を伝播する光の強度は輻射輸送方程式に従う。また、原子炉中の中性子やガンマ線も輻射輸送方程式で記述される。また、地震波も輻射輸送方程式で取り扱うことができる。このため、物理、天文、地球物理、生物、医学、原子炉工学などの様々な分野で輻射輸送方程式が登場する。ところが輻射輸送方程式は空間変数と速度変数を持つ積分微分方程式であり、解析解を求めることはもとより数値計算することも容易ではない。時間に依存する場合には時間変数も加わる。数値計算手法としては、モンテカルロ・シミュレーションに加えて差分法、有限要素法などが用いられる。1次元の場合と、2次元、3次元の等方散乱の場合には解析解が知られている。等方散乱とは、ランダム媒質中で各方向に等確率で散乱されるという意味である。人体をはじめとした生体組織では通常強く前方に散乱され、等方散乱とは様相が異なる。

原子炉工学や医用イメージングで現れる複雑な形状の媒質で輻射輸送方程式を計算するためには、モンテカルロ、差分法、有限要素法などの数値手法が必要になる。本研究で解析解が得られると、これらの数値手法の妥当性を保証するベンチマークを提供できる。

本研究で得られる解析解は、将来的に輻射輸送方程式の逆問題を解くことに使える。光トモグラフィーは X 線の代わりに近赤外線を用いた CT (Computed Tomography) である。生体組織中の光強度は輻射輸送方程式に従うことが知られており、光トモグラフィーは、境界値から輻射輸送方程式の吸収係数や散乱係数を決める逆問題を解くことで行われる。光トモグラフィーでは通常、輻射輸送方程式の近似式である拡散方程式が使われる。

2. 研究の目的

本研究の目的は輻射輸送方程式の解析解を構築することである。境界がある媒質を想定し、特に等方散乱に限定せず任意の散乱を仮定する。

3. 研究の方法

輻射輸送方程式の斉次解の求めることで固有モードが得られる。興味のあるもとの輻射輸送方程式の解は、境界条件を満たすように固有モードを重ね合わせることで求まる。

1960年に米国の物理学者により、1次元に限定されるが、特異固有関数を用いる変数分離の方法が開発されて解析解が求まった。この方法では、固有モードの重ね合わせとして解析解が得られる。固有モードには特異固有関数と呼ばれるデルタ関数とコーシーの主値積分から成る超関数が現れ、また対応する「固有値」は固有値と連続スペクトルで構成され、数理物理として興味深い構造を持つ。境界がある場合に初めて得られた解析解であり、アメリカ、イギリス、フランスを中心に関連する論文が量産された。この特異固有関数の方法を2次元、3次元に拡張するための多大な努力がなされたが、満足いく結果は得られなかった。Duderstadt と Martin による教科書で特異固有関数の方法を多次元に拡張することが困難であることが紹介されると、拡張を試みる論文も激減した。

2014年になり、3次元の場合に境界のない無限系における解析解が申請者によって得られた。いったんは諦められた特異固有関数の方法を復活させることができた鍵は、回転座標の考えの利用である。本研究では回転座標の技術をさらに発展させることで輻射輸送方程式の研究を進める。

4. 研究成果

双直交の固有モードの計算に困難があり、境界のある状況での解析解は未解決問題のままである。しかし、応用面で成果をあげることができた。解析解と関係のある輻射輸送方程式の数値手法としては回転座標の方法が知られているが、球面調和関数の級数が発散してしまうという弱点があった。これを克服した、3次元解析的離散方位法を開発した。時間に依存する輻射輸送方程式については1次元の場合にも安定な数値手法が無かったが、逆ラプラス変換の数値計算を工夫することができた。これにより得られた輻射輸送方程式の解を実験結果と比較することにより、多孔質媒体を水に混ぜて移動する分子の輸送の支配方程式が輻射輸送方程式であることを明らかにできた。多孔質媒体中の分子輸送の支配方程式は当該分野の長年の問題であったが、この問題を前に進めることができたことになる。

研究は逆問題へも展開した。解析解を利用した数値計算は高速であるために、輻射輸送方程式の逆問題を解くことが可能になる。輻射輸送方程式の係数決定逆問題を解くことで、空間周波数領域の測定に対応する光トモグラフィーの数値手法を提案した。また、拡散近似を施した場合について、乱数を用いる手法も開発した。異常輸送現象について、非整数階の時間微分を持つ輻射輸送方程式に対する逆問題を考えた。この逆問題に対してリプシッツ安定性を示すことができた。輻射輸送方程式を用いた光学特性値の決定も行った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 2件）

| | |
|---|---------------------------|
| 1. 著者名 Jiang Yu, Machida Manabu, Todoroki Norikazu | 4. 巻 38 |
| 2. 論文標題 Diffuse optical tomography by simulated annealing via a spinHamiltonian | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Journal of the Optical Society of America A | 6. 最初と最後の頁 1032 ~ 1032 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1364/JOSAA.421219 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 該当する |
| 1. 著者名 Amagai Kenji, Hatano Yuko, Machida Manabu | 4. 巻 50 |
| 2. 論文標題 Linear Transport in Porous Media | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Computational and Theoretical Transport | 6. 最初と最後の頁 377 ~ 389 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/23324309.2020.1842453 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Machida Manabu, Hoshi Yoko, Kagawa Keiichiro, Takada Kazuki | 4. 巻 37 |
| 2. 論文標題 Decay behavior and optical parameter identification for spatial-frequency domain imaging by the radiative transport equation | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Journal of the Optical Society of America A | 6. 最初と最後の頁 2020 ~ 2031 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1364/JOSAA.402124 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Kawamoto Atsushi, Machida Manabu | 4. 巻 100 |
| 2. 論文標題 Global Lipschitz stability for a fractional inverse transport problem by Carleman estimates | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Applicable Analysis | 6. 最初と最後の頁 752 ~ 771 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00036811.2019.1620931 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|---------------------|
| 1. 著者名 Capart Antoine、Ikegaya Shunsuke、Okada Eiji、Machida Manabu、Hoshi Yoko | 4. 巻 5 |
| 2. 論文標題 Experimental tests of indicators for the degree of validness of the diffusion approximation | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Physics Communications | 6. 最初と最後の頁 25012 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/2399-6528/abe4e1 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|------------------|
| 1. 著者名 Machida, Manabu | 4. 巻 2174 |
| 2. 論文標題 Chandrasekhar polynomials - A brief review | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku | 6. 最初と最後の頁 10 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 無 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名 Machida Manabu | 4. 巻 234 |
| 2. 論文標題 Numerical algorithms of the radiative transport equation using rotated reference frames for optical tomography with structured illumination | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer | 6. 最初と最後の頁 124 ~ 138 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jqsrt.2019.06.009 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名 Amagai Kenji、Yamakawa Motoko、Machida Manabu、Hatano Yuko | 4. 巻 132 |
| 2. 論文標題 The linear Boltzmann equation in column experiments of porous media | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Transport in Porous Media | 6. 最初と最後の頁 311 ~ 331 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11242-020-01393-1 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計17件（うち招待講演 11件 / うち国際学会 6件）

| |
|--|
| 1. 発表者名 Manabu Machida |
| 2. 発表標題 Diffuse optical tomography using simulated annealing |
| 3. 学会等名 RIMS Workshop on Theory and practice in inverse problems (招待講演) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---------------------------------------|
| 1. 発表者名 町田学 |
| 2. 発表標題 多孔質媒体中の輸送の支配方程式としての輻射輸送方程式 |
| 3. 学会等名 日本応用数理学会 |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Machida, Manabu |
| 2. 発表標題 The linear Boltzmann equation as a governing equation in porous media |
| 3. 学会等名 Summer Intensive Seminar on Inverse Modelling and Computation (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--------------------------------|
| 1. 発表者名 町田学 |
| 2. 発表標題 多孔質媒体中の分子の線形ボルツマン輸送 |
| 3. 学会等名 日本流体力学会 年会 |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 町田学 |
| 2. 発表標題 輻射輸送方程式の係数決定逆問題に対するリブシツツ安定性 |
| 3. 学会等名 京都大学数学教室談話会 (招待講演) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|-----------------------------------|
| 1. 発表者名 町田 学 |
| 2. 発表標題 解析解に基づく輻射輸送方程式の数値計算 |
| 3. 学会等名 日本応用数理学会 第15回研究部会連合発表会 |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Machida Manabu |
| 2. 発表標題 Spatial-frequency-domain optical tomography in the nondiffusive regime |
| 3. 学会等名 Applied Inverse Problems Conference (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Machida Manabu |
| 2. 発表標題 Optical medical imaging in the radiative transport regime |
| 3. 学会等名 International Congress on Industrial and Applied Mathematics (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Machida Manabu |
| 2. 発表標題 The linear transport in porous media |
| 3. 学会等名 The 26th International Conference on Transport Theory (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 町田 学 |
| 2. 発表標題 輻射輸送方程式の新解法と光トモグラフィ |
| 3. 学会等名 日本学術会議 第9回計算力学シンポジウム (招待講演) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Machida Manabu |
| 2. 発表標題 A numerical method for inverse transport problems |
| 3. 学会等名 京都大学数理解析研究所 偏微分方程式による逆問題解析とその周辺 (招待講演) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Manabu Machida |
| 2. 発表標題 Spatial-Frequency Optical Tomography in the Radiative-Transport Regime |
| 3. 学会等名 Tianyuan Workshop on Mathematical and Computational Challenges of Medical Imaging and Inverse Problems (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 町田学 |
| 2. 発表標題 Inverse problems in medical imaging: Optical tomography |
| 3. 学会等名 波動・振動・流れの制御と逆問題 - 理論と数値計算 - (招待講演) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Manabu Machida |
| 2. 発表標題 Radiative transport-based optical tomography with structured illumination |
| 3. 学会等名 The 12th International Conference on Complex Medical Engineering (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|-----------------------------------|
| 1. 発表者名 町田学 |
| 2. 発表標題 3次元FN法による輻射輸送方程式の高速数値計 |
| 3. 学会等名 日本物理学会2018年秋季大会[物性] |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 町田学 |
| 2. 発表標題 Nondestructive inspection of biological tissue by optical tomography |
| 3. 学会等名 Non-destructive inspection for concrete structures and related topics (招待講演) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---------------------------------|
| 1. 発表者名 町田学 |
| 2. 発表標題 解析解に基づく輻射輸送方程式の数値計算 |
| 3. 学会等名 日本応用数学会第15回研究部会連合発表会 |
| 4. 発表年 2019年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
| | | |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
| | |