

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 3 年 6 月 22 日現在

機関番号：56401

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05590

研究課題名（和文）強相関ネットワーク複合系上のパーコレーション転移における臨界状態の解明

研究課題名（英文）Analysis on critical states of percolation transition on strongly correlated complex network multiplexes

研究代表者

谷澤 俊弘（TANIZAWA, Toshihiro）

高知工業高等専門学校・ソーシャルデザイン工学科・教授

研究者番号：60311106

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：2007年Nohは、ノード結合に正の次数相関を持つERネットワーク上のパーコレーション転移は平均場型ではない可能性を示唆したが、これが正の次数相関を持つネットワークの一般的な性質なのかについては明らかになっていない。本研究では、べき乗の次数分布と強い正の次数相関を持つネットワーク上でのパーコレーション転移について詳細なシミュレーションを行い、有限サイズクラスター分布の転移点でのピーク消失は見られないことを確認した。この結果は表面上はNohの結果と矛盾するものだが、両者が対象とするネットワーク構造には違いがある。この違いの原因の解明については、厳密な方程式系から出発する解析的手法が必要となる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

複雑ネットワークは規則的配列を取る正方格子よりも一般的な構造を持ち、統計物理学における相転移現象の研究対象としても興味深い。本研究課題は、ノード結合に正の次数相関があるネットワーク上でのパーコレーションが平均場型か否かという未解決問題を解明しようというもので、構成要素間の相関を取り入れた相転移現象の考察という点においても意義深い。本研究の成果から正相関ネットワークにおいては転移のタイプがネットワーク構造に依存する可能性が示唆され、その依存性をさらに理論的に厳密に考察する必要があることが明らかになった。

研究成果の概要（英文）：In 2007, Noh pointed out that percolation transition on ER networks with assortative correlation in node connection does not belong to mean-field type. However, it is not yet clear that whether it is generally applicable to networks with assortative correlation in node connection.

In this study, I performed extensive numerical simulations for networks with power-law degree distributions and assortative correlation in node connection and confirmed that the peak disappearance in finite-size cluster distribution at percolation transition does not observed. The apparent inconsistency between this result and Noh's might come from the difference in their network structure. To clarify this, analytical arguments based on rigorous equations is necessary.

研究分野：統計物理学（複雑ネットワーク理論）

キーワード：複雑ネットワーク理論 臨界現象 相転移 数値シミュレーション

1. 研究開始当初の背景

- (1) 2007年 Noh は、ノード間結合に次数相関を取り入れた Erdős-Rényi (ER) ネットワーク上のパーコレーション転移に関する数値計算を行い、同程度の次数のノードが結合しやすい正相関を持つ ER ネットワークでは、転移点における有限サイズクラスター分布に発散が見られず、平均場近似が適用できる転移のユニバーサリティクラスに属していない可能性があることを報告した。(引用文献①)
- (2) 一方 Tanizawa 等は、ノード除去に対して最も頑強なネットワーク構造は、与えられた次数分布の下で最大の正の次数相関を持つ、いわゆる玉ねぎ構造であり、さらに、この玉ねぎ構造ネットワークでのパーコレーション転移は平均場タイプであることを明らかにした。(引用文献②)
- (3) このように、ノード間結合に正の次数相関を持つネットワークのパーコレーション転移が属するユニバーサリティクラスの詳細については、総合的に理解されておらず、未だ明らかになっていない。

2. 研究の目的

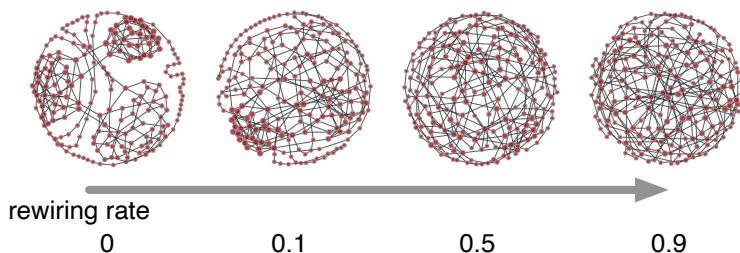
- (1) 構成要素間の相関を取り入れた相転移理論構築の一環として、ノード間結合に正の次数相関を持つネットワーク上におけるパーコレーション転移を詳細に調べ、理解を進めることを目的とし、研究を行った。

3. 研究の方法

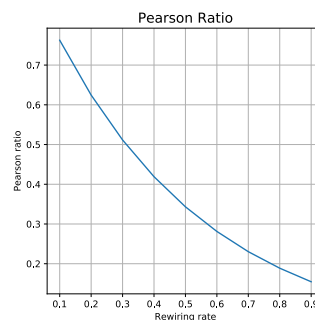
- (1) Noh の 2007 年の数値計算は、次数相関を持たない ER ネットワークにエッジ交換によって次数相関を導入することで行われている。しかし、この方法ではピアソン係数で表わされる次数相関は 0.3 の程度に留まり、次数相関の影響が十分に取入れられない懸念がある。そこで、本研究では最大の次数相関 (ピアソン係数 1) を持つ玉ねぎ構造ネットワークから出発し、エッジ交換によって次数相関を消していく方向で数値計算を行うことで、次数相関の影響をフルに取り入れることとした。具体的な計算については以下の通りである。
- (2) 次数分布が  $P(x) \propto k^{-1}$  で、総ノード数 10000、最小次数 2、最大次数 50 の玉ねぎ構造を持つネットワークを生成し、次数分布を変えないように注意しながらネットワーク内の 2 本のエッジを確率  $r$  でつなぎ替えて得られたネットワークのノード除去に対する最大連結成分と有限サイズクラスターの平均値を計算する。この計算を各  $r$  について 5000 回を行い、結果のサンプル平均を取った。

4. 研究成果

- (1) 下に、玉ねぎ構造 (一番左) からエッジのつなぎ替えを確率  $r = 0, 0.1, 0.5, 0.9$  で行い、次数相関を消していったネットワークを図示した。(ただし、ノード数は 200 とし図を見易いものとしている。) 同種次数ノードが結合された玉ねぎ構造 ( $r = 0$ ) から次数相関の無い通常のスケールフリーネットワークに移行する様子が見える。

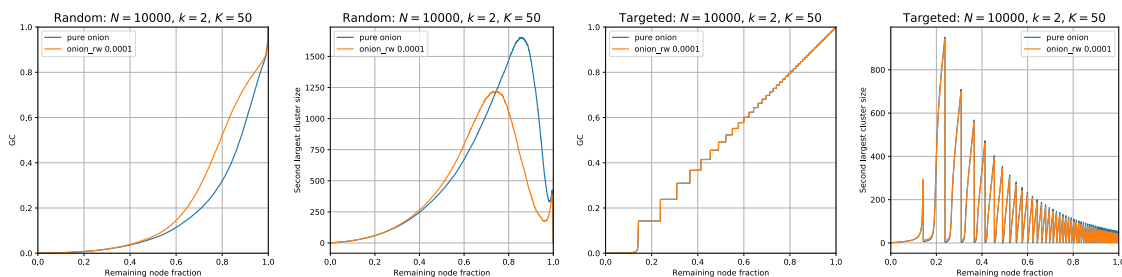


- (2) 右図は、つなぎ替えの確率 (rewiring rate) の関数としてプロットした次数相関に関するピアソン係数である。つなぎ替えの確率が 0 のときはピアソン係数が 1 でそこからつなぎ替えの確率が増加するにつれて、ピアソン係数が 0 に近づき、次数相関が無くなっていく様子が見える。この方法により正の次数相関の全領域をカバーすることが確かに可能である。

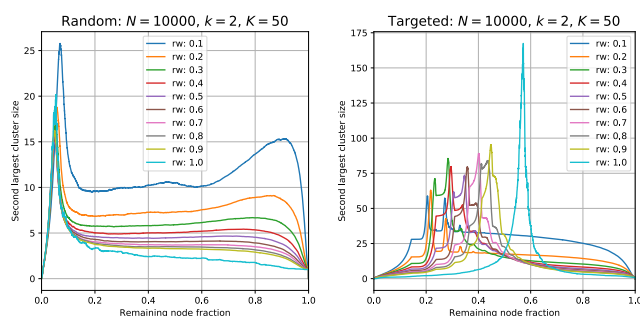


- (3) 次のページの図は、玉ねぎ構造からの微小なずれの影響を調べるためにごく少数 ( $r = 0.0001$ ) の割合のエッジのつなぎ替えを行ったネットワークについて計算した結果である。対比のため最大の次数相関 (玉ねぎ構造) の場合もプロットしている。一番左がランダムなノード除

去に対する最大連結成分の変化, そこから右に向かって順に, ランダムなノード除去に対する有限サイズクラスターの平均値の変化, ハブからの選択的ノード除去に対する最大連結成分の変化, ハブからの選択的ノード除去に対する有限サイズクラスターの平均値の変化である。注目すべきなのは, ランダムなノード除去に対する有限サイズクラスターの平均値 (左から二番目の図) である。Noh によれば, ER ネットワークの場合は, 有限サイズクラスター平均値について転移点での発散が見られないということであった。この図でも単なるなまったピークのみで, 発散の兆候は確かに見られないようであるが, 実はこのネットワークのランダムなノード除去に対する転移点はノード除去率 0.97 の辺りにあり, よく観察すると, そこで発散の兆候が現われていることがわかる。ハブからの選択的ノード除去に対しては, 玉ねぎ構造を反映した階段状の変化 (最大連結成分, 左から三つ目の図), および, 多重転移に伴う多数のピーク (有限サイズクラスター平均値, 一番右の図) が見える。



- (4) 次に, エッジのつなぎ替え確率をさらに上げ, 次数相関を減少させてみると, 下図に示す通り, つなぎ替え確率が  $r = 0.1$  となる辺りで玉ねぎ構造が壊れ, ノード除去率 0.85 の辺りの有限サイズクラスター平均値のピークが減少し新たにノード除去率 0.1 の辺りに別のピークが現われ, それが  $r$  の増加とともに減少する。下図右は, ハブからの選択的ノード除去に対する有限サイズクラスターの平均値である。この図からも, つなぎ替え確率が増加するにつれて玉ねぎ構造が崩壊し, 通常のスケールフリーネットワークの振舞いに近づいていく様



子がわかる。

- (5) 以上の結果から, 本研究の対象である, べき乗の次数分布を持つ正相関ネットワークについては, パーコレーション転移は少々複雑な振舞はするものの, 平均場の振舞からは逸脱していないように思われる。より詳細な検討については, 数値計算だけではなく, 厳密な方程式系から出発する解析が必要であり, 今後の課題である。

#### 〈引用文献〉

- ① J. D. Noh, Physical Review E Vol. 76, 026116 (2007).
- ② T. Tanizawa, S. Havlin, and H. E. Stanley, Physical Review E, Vol. 85, 046109 (2012).

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件／うち国際共著 2件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Tomomichi Nakamura, Michael Small, and Toshihiro Tanizawa	4. 巻 99
2. 論文標題 Long-range correlation properties of stationary linear models with mixed periodicities	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Physical Review E	6. 最初と最後の頁 22128
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1103/PhysRevE.99.022128	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Toshihiro Tanizawa, Tomomichi Nakamura, Fumihiko Taya, and Michael Small	4. 巻 512
2. 論文標題 Constructing directed networks from multivariate time series using linear modelling technique	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications	6. 最初と最後の頁 437, 455
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.physa.2018.08.137	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 0件／うち国際学会 9件）

1. 発表者名 Toshihiro Tanizawa
2. 発表標題 Percolation transition on scale-free networks with strong degree assortativity
3. 学会等名 NetSciX-Tokyo（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Tomomichi Nakamura and Toshihiro Tanizawa
2. 発表標題 Constructing networks for multivariate nonlinear and nonstationary time series
3. 学会等名 NetSciX-Tokyo（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Toshihiro Tanizawa
2. 発表標題 Percolation on scale-free networks with assortative degree correlation
3. 学会等名 NetSci2019 ( 国際学会 )
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toshihiro Tanizawa
2. 発表標題 The GitHub Project, Network Science in Your Pocket
3. 学会等名 NetSciEd2019 ( 国際学会 )
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toshihiro Tanizawa
2. 発表標題 Constructing directed networks from multivariate time series using linear modeling technique
3. 学会等名 ComNet'19 ( 国際学会 )
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toshihiro Tanizawa
2. 発表標題 Percolation transition on scale-free networks with assortative degree correlation
3. 学会等名 Complex Networks 2018 ( 国際学会 )
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Toshihiro Tanizawa
2. 発表標題 Building Web contents for the Project, 'Network Science in Your Pocket'
3. 学会等名 NetSciEd2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 谷澤 俊弘
2. 発表標題 強次数相関ネットワーク上のパーコレーション転移における臨界現象について
3. 学会等名 日本物理学会秋季大会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Toshihiro Tanizawa, Tomomichi Nakamura, and Michael Small
2. 発表標題 Constructing directed networks from multivariate time series via linear modeling technique
3. 学会等名 International School and Conference on Network Science (NetSci2017) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Toshihiro Tanizawa, Tomomichi Nakamura, and Michael Small
2. 発表標題 Constructing networks from multivariate time series data
3. 学会等名 First International Summer Institute on Network Physiology (ISINP) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 谷澤俊弘, 中村知道
2. 発表標題 多変数時系列データのネットワーク表示
3. 学会等名 日本物理学会第73回年次大会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計3件

1. 著者名 林幸雄、谷澤俊弘、鬼頭朋美、岡本洋	4. 発行年 2019年
2. 出版社 近代科学社	5. 総ページ数 192
3. 書名 Pythonと複雑ネットワーク分析	

1. 著者名 アルバート=ラズロ・バラバシ (監訳者: 池田裕一, 井上寛康, 谷澤俊弘)	4. 発行年 2019年
2. 出版社 共立出版	5. 総ページ数 472
3. 書名 ネットワーク科学	

1. 著者名 編者: C. Cramer, M.A. Porter, H. Sayama, L. Sheetz, and S.M. Uzzo (Ch12: Toshihiro Tanizawa)	4. 発行年 2018年
2. 出版社 Springer International Publishing	5. 総ページ数 205
3. 書名 Network Science in Education	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------