

令和 2 年 6 月 13 日現在

機関番号：62615

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K12643

研究課題名(和文)半整数緩和とFPTアルゴリズムへの応用に関する研究

研究課題名(英文)Half-integral relaxation and its application to FPT algorithms

研究代表者

岩田 陽一(Iwata, Yoichi)

国立情報学研究所・情報学プリンシプル研究系・助教

研究者番号：10784902

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文): 難しい最適化問題を解く際に広く用いられている手法の一つが「分枝限定法」である。これは最適値が少なくともいくつ以上であるという下界を見積もることで無駄な探索を省き高速化する手法であるが、その有用性を理論的に示すことは難しかった。下界にはLP緩和という手法が広く用いられており、本研究では特にLP緩和が「半整数性」を有する場合について、(1)LP緩和の効率的な計算法、(2)分枝限定法が有効であること、(3)前処理が有効であること、の3点を理論的に証明した。また、半整数性を有さないが理論的に分枝限定法の有用性を示すことの出来る新たな例も発見した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

分枝限定法は実用的には広く用いられているが、その理論的な有効性は未知の部分が多く、問題を少し変更しただけで計算時間が大きく変わってしまうなど、うまく動作するかを事前に予測することが難しかった。本研究では、限定的ではあるがどのような場合に分枝限定法が有効であるかを理論的に示し、組合せ最適化の手法を用いて更なる高速化を達成した。また研究を通じて参加した競技会及びその後の追加実験などを通し、理論研究で得た成果による実性能の向上や、実験で得られた知見の理論研究への応用にも成功し、理論と実用とを近づけることに貢献した。

研究成果の概要(英文): The branch-and-bound method is widely used for solving hard optimization problems. This method practically speeds up the search by eliminating wasteful searches by estimating a lower bound on the optimal value. On the other hand, it was difficult to theoretically prove its efficiency. As lower bounds, LP relaxations are widely used. In this research, we focused on special LP relaxations that admit half-integrality. We gave (1) efficient algorithms for solving half-integral LPs, (2) proof of the efficiency of branch-and-bound methods, and (3) proof of the efficiency of preprocessing. Moreover, we found a new example that does not admit half-integrality, but the efficiency of the branch-and-bound method can be theoretically proved.

研究分野：理論計算機科学

キーワード：組合せ最適化 FPTアルゴリズム 分枝限定法 線形計画法

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

現在では NP 困難問題は多項式時間では解けないであろうと広く信じられている。一方で、問題の難しさはあらゆる入力に対する難しさを意味せず、簡単に解ける入力も存在する。従来の計算量理論では、計算量を入力長  $n$  の関数として評価していたが、FPT (Fixed Parameter Tractable) アルゴリズムという理論計算機科学分野では、新たに入力の真の難しさを表すパラメータ  $k$  を導入し、計算量をパラメータ  $k$  と入力長  $n$  の関数として評価する。その結果、計算時間が  $f(k) \text{ poly}(n)$ 、すなわち、パラメータに関しては指数関数的であっても、入力長に関しては多項式的にしか依存しないように出来れば、そのアルゴリズムはパラメータが小さな入力に対しては理論上効率的に動作するとみなすことができる。このようなアルゴリズムを  $k$  に対する FPT アルゴリズムと呼ぶ。

これまで様々な問題・パラメータに対して FPT アルゴリズムが開発されてきたが、その多くは実用上高速な手法に対して FPT の枠組みから理論解析を与えるのではなく、全く新しいアプローチで FPT アルゴリズムを作る研究であり、 $f(k)$  が非常に巨大な指数関数であったり、 $\text{poly}(n)$  における  $n$  の次数が非常に巨大であったりするなど、実用的にはそのままでは役に立たないことが多かった。近年の研究で、「分枝限定法」という実用上広く使われている枝刈り探索手法が、頂点被覆問題などのいくつかの問題に対して FPT の枠組みから答えが小さな入力に対して理論上効率的であることが分かってきた。これらの問題に共通するのが枝刈りに用いる LP 緩和の「半整数性」という性質である。私のこれまでの研究では、半整数性を用いた分枝限定法を実際にも実装し、頂点被覆問題に対して商用整数計画ソルバを上回る実性能を有することを示し、また Feedback Vertex Set (FVS) 問題に対して実性能を競う競技会で優勝を果たすなど、半整数緩和を用いた分枝限定法が単に理論上高速なだけでなく、実用的にも有用であることを示してきた。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、理論上・実用上の両面から関心が集まりつつある半整数緩和について、更なる発展を目指すものである。特に、どのような場合に LP 緩和が半整数性を有するかをより明らかにすると共に、半整数 LP 緩和の最適解を効率的に求める組合せ的手法を開発することで、その適用範囲を広げること目標とした。従来の研究では、頂点被覆問題などの一部の問題に対しては最小カット問題に帰着することで LP 緩和解が求まることが知られていたが、他の問題に対しては指数サイズの LP を解く必要があり、多項式時間であるとは言え、実的にも理論的にも非常に時間がかかっていた。また、分枝限定法を適用する際にはどの頂点で分岐するかを選択が重要であり、頂点被覆問題の場合には適切に分岐頂点を選択することで更に理論計算量の削減が可能であることが知られていたが、他の問題に対しては全通りの分岐を試してみる以外の方法が無かった。これら二つの点について、他の問題に適用可能な一般的手法の確立を目指した。この他、分枝限定法に限らず、実用上高速な手法の理論解析および理論上高速な手法の実用化を進めることで、より幅広い問題に対して理論と実用とを結びつけることを目指した。

### 3. 研究の方法

まず、FVS 問題に関しては双対問題を考えることにより増大路探索という手法で半整数 LP 緩和を解くことが出来ることを発見した。この手法では双対問題を考えることで問題を半整数パス詰込という組合せ最適化問題へと変換し、それを増大路探索という組合せ最適化手法を用いて解くということを行った。他の問題について同様の方針を適用した場合、群制約付きのパス詰込問題が解ければよいことを発見し、パス詰込研究の専門家である大阪大学の山口氏と制約充足問題の専門家である NII の吉田氏と共同研究を進めることで最終的に解決に至った。この成果は高く評価され、理論計算機科学のトップ会議である FOCS に採択されたほか、国内外の会議・ワークショップにて招待講演を行った。

この他、競技会にて実用上の有効性が示されていた FVS 問題に対する次数による下界を用いた分枝限定法や、TSP に対する局所探索の理論的な解析などを国内外の研究者と共同で行った。

### 4. 研究成果

本研究の主な成果は、半整数 LP 緩和を用いた分枝限定法・前処理ならびにそこから派生した全く別の下界に基づく FVS 問題の分枝限定法の理論解析に関する一連の研究である。その中でも一番の成果は、半整数緩和を組合せ的に高速に解くことで、様々な問題に対して線形時間 FPT アルゴリズム、すなわち、任意の定数  $k$  に対して、大きさが  $k$  以下の解を線形時間で求めるアルゴリズム、を与えた [Iwata, Yamaguchi, Yoshida FOCS '18] である。この研究ではまず、既存の半整数 LP 緩和を持つことが知られている問題が、0/1/all CSP と呼ばれる充足可能性問題の最適化版であることに着目した。この CSP は、変数の値を一つ決めると、周囲の変数の値が連鎖的に決まっていく「unit propagation」という手法で充足解が求まるという性質がある。充足解が存在しない場合は、パス状に連鎖した unit propagation によって矛盾が見つかるのだが、そのような「矛盾パス」の半整数詰込問題が実は半整数 LP 緩和の双対問題となっている。大阪大学の山口氏、NII の吉田氏との共同研究により、このパス詰込問題に対する線形時間増大路アルゴリズムを与え、さらに相補性定理を用いることで、取り除くと必ず最適 LP 緩和の値が変化するような頂点を線形時間で求める手法を開発した。これらと分枝限定法を組み合わせることで、様々な問題に対する統一的な線形時間 FPT アルゴリズムを得ることに成功した。分枝限定法と

いう現実に広く用いられている手法を用いて、これまで全く異なる手法によって各個撃破されてきた様々な問題に対して、統一的に従来の計算量を大きく改善することが出来、理論と現実のギャップを縮めることに成功したと言える。この研究は理論計算機科学のトップ会議である FOCS 2018 に採択され、発表を行った。また、後述する FVS 問題の前処理への応用と合わせて、コンピューテーション研究会、SIAM DM 2018、JCCA 2018、Workshop 2019、RAMP 2019 という国内外の会議・ワークショップにて講演・招待講演を行った。

次に、半整数緩和の分枝限定法以外への応用として、半整数緩和を用いることで FVS 問題の効率的な前処理が可能であることを示した [Iwata ICALP '17]。現実の NP 困難問題を解く際には、まず最初に前処理によって簡単な部分をそぎ落とし、問題サイズを小さくしてから残りを分枝限定法などで解くということが広く行われている。特に、LP 緩和を用いた分枝限定法の場合には、変数の値を 0 もしくは 1 に固定してみて、その結果 LP 緩和解が欲しい最適解を上回るならば逆の値に固定するというのは有用な前処理である。本研究では FVS 問題に対して、この自然な変数固定法を元にした非常にシンプルな前処理を開発し、従来の研究で開発された複雑な前処理よりも計算時間・前処理後の問題サイズの両面で優れることを理論的に示した。これにより半整数緩和の適用範囲が更に広がった。

これらの理論研究は、PACE Challenge 2016 という FVS 問題に対するアルゴリズムの実性能を競う競技会への参加経験がもとになっている。この競技会では、私のチームが半整数 LP 緩和を用いた分枝限定法により優勝を果たしたのだが、その際には他のヒューリスティックとして、「次数による下界」というのを用いていた。これは、無閉路グラフの辺数は頂点数未満であるという定理を用いて、次数の和から少なくとも何点取り除く必要があるかの下界を導くものである。近年行われた、ワルシャワ大学のチームによる追加実験で、この次数による下界と「最大次数分岐」という分枝頂点選択ルールを組み合わせたものが実験的には最も優れた性能を示すことが報告されていた。そこで本研究では、京都大学の小林氏と共同で、このアルゴリズムの理論解析を行い、実際に半整数緩和による分枝限定法のみならず、FVS 問題に対する非常に複雑な分岐ルールを用いた既存の最速の決定的アルゴリズムよりも優れた計算量を示すことに成功した [Iwata, Kobayashi IPEC '19]。

この他、半整数緩和・分枝限定法に留まらず、実用上高速な手法の理論解析ならびに理論上高速な手法の実用化に挑戦した。まず、シュタイナー木問題という実用的・理論的に重要な NP 困難問題を題材にした競技会 PACE Challenge 2018 に東京大学の重村氏と参加した。シュタイナー木問題はグラフ上で与えられたターミナル点集合を全て連結にするような最小重みの木を求めるという問題である。グラフが平面的かつターミナルがすべて外面に乗っている場合には動的計画法により多項式時間で解けることが知られていたが、この条件は非常に厳しく、現実に適用できる機会は殆どなかった。本研究では、このアルゴリズムで用いられているアイデアが一般の場合にも枝刈りとして活用できることを発見し、枝刈り動的計画法によって一部門で優勝、もう一部門で準優勝という成果を果たした。この成果は人工知能分野のトップ会議である AAAI 2019 に採択され、発表を行った [Iwata, Shigemura AAAI '19]。

また、近年 FPT アルゴリズムの分野で研究が進められていた巡回セールスマン問題 (TSP) に対する局所探索の理論研究も行った。TSP に対する局所探索では、現在の閉路から  $k$  本の辺を入れ替えることでより短い閉路を生成する  $k$ -opt という操作が用いられている。一方、その実用性の高さに対し、近年の研究では、 $k$ -opt 探索は  $k$  が非常に小さい場合でも理論的に難しいことが証明されてきた。この理論と現実とのギャップの原因は、実用上はまず初めに探索の効率化のために有用でなさそうな辺を前処理によって削除することでグラフを疎にするのに対し、理論研究では密グラフを扱っているという点にあると着目し、理論と現実とを近づけることを目的とした湘南会議「Parameterized Graph Algorithms & Data Reduction: Theory Meets Practice」で疎グラフに対する  $k$ -opt 探索の計算量を未解決問題として提案し、海外の研究者との共同研究につながった。最終的に、疎グラフの場合には、 $k$  が 8 という比較的大きな数まで準線形時間で可能であり、9 以上は不可能であるという完全な分類を得ることが出来た。この成果は理論アルゴリズムの国際会議である ESA 2019 に採択され、発表を行った [Bonnet, Iwata, Jansen, Kowalik ESA '19]。

このように、本研究では半整数緩和と分枝限定法を主軸に、枝刈り動的計画法や局所探索など、様々な手法について、理論上・実用上高速なアルゴリズムを開発した。これにより実用上高速な手法がどんな入力に対して理論的に有効であるかについての証明・知見を得ることが出来、また逆に理論的に高速なアルゴリズムを活用することで実用上高速なアルゴリズムの開発に成功した。一方、分枝限定法の理論的な適用範囲が本研究によって広がったとは言え、まだまだ現実における適用範囲の広さとは大きな溝があり、また局所探索など他の実用上有用な手法の理論解析も未知の点が多く、今後の課題である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 Yoichi Iwata, Yutaro Yamaguchi, Yuichi Yoshida	4. 巻 -
2. 論文標題 0/1/All CSPs, Half-Integral A-Path Packing, and Linear-Time FPT Algorithms	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of the 59th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)	6. 最初と最後の頁 462--473
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1109/FOCS.2018.00051	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Yoichi Iwata, Takuto Shigemura	4. 巻 -
2. 論文標題 Separator-based Pruned Dynamic Programming for Steiner Tree	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the 33rd AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI)	6. 最初と最後の頁 1520--1527
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1609/aaai.v33i01.33011520	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Yoichi Iwata	4. 巻 -
2. 論文標題 Linear-Time Kernelization for Feedback Vertex Set	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proceedings of the 44th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP)	6. 最初と最後の頁 68:1--68:14
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4230/LIPIcs.ICALP.2017.68	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Yoichi Iwata, Tomoaki Ogasawara, Naoto Ohsaka	4. 巻 -
2. 論文標題 On the Power of Tree-Depth for Fully Polynomial FPT Algorithms	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of the 35th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS)	6. 最初と最後の頁 41:1--41:14
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4230/LIPIcs.STACS.2018.41	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Edouard Bonnet, Yoichi Iwata, Bart M. P. Jansen, Lukasz Kowalik	4. 巻 -
2. 論文標題 Fine-Grained Complexity of k-OPT in Bounded-Degree Graphs for Solving TSP	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the 27th Annual European Symposium on Algorithms (ESA)	6. 最初と最後の頁 23:1--23:14
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4230/LIPIcs.ESA.2019.23	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Yoichi Iwata, Yusuke Kobayashi	4. 巻 -
2. 論文標題 Improved Analysis of Highest-Degree Branching for Feedback Vertex Set	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the 14th International Symposium on Parameterized and Exact Computation (IPEC)	6. 最初と最後の頁 22:1--22:11
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4230/LIPIcs.IPEC.2019.22	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計6件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Yoichi Iwata
2. 発表標題 0/1/all CSPs, Half-Integral A-path Packing, and Linear-Time FPT Algorithms
3. 学会等名 コンピューテーション研究会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yoichi Iwata
2. 発表標題 Solving Feedback Vertex Set via Half-Integral Relaxation
3. 学会等名 SIAM Conference on Discrete Mathematics (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yoichi Iwata
2. 発表標題 Solving Feedback Vertex Set via Half-Integral Relaxation
3. 学会等名 The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岩田 陽一
2. 発表標題 Feedback Vertex Set 問題に対する線形時間カーネル
3. 学会等名 夏のLAシンポジウム2017
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yoichi Iwata
2. 発表標題 A new kernel for Feedback Vertex Set
3. 学会等名 Worker (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岩田 陽一
2. 発表標題 LP緩和の半整数性と分枝限定法
3. 学会等名 RAMP (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----