

令和 6 年 6 月 11 日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2023

課題番号：17K12646

研究課題名（和文）組合せの制約をもつ線形システムの解法

研究課題名（英文）On solving linear systems with combinatorial constraints

研究代表者

澄田 範奈 (Sumita, Hanna)

東京工業大学・情報理工学院・准教授

研究者番号：10761356

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,900,000 円

研究成果の概要（和文）：本研究課題の対象は、組合せの制約をもつ線形システムとして表せる問題である。特に、組合せ最適化分野で重要な制約である、マトロイド制約やナップサック制約をもつ問題に着目する。本研究で、最適マトロイド分割やロバスト組合せ最適化、公平割当などの問題に対して効率的なアルゴリズムおよびその理論解析を与えた。さらに、オンライン最適化など当初は計画していなかった方向性の問題でも同様に研究成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究課題は主に組合せ最適化の理論的側面の研究であるが、ニーズによっては実応用も期待できる。例えば、本研究で取り組んだロバスト組合せ最適化問題には、セキュリティゲームといった実応用をもつ問題も含まれる。また、本研究のトピックの中には今後新たな問題の枠組みとして発展が期待できるものもあり、本研究課題の成果はその一ステップになると考えている。本研究の成果は、理論計算機科学や人工知能分野における査読付き国際会議および論文誌で発表している。

研究成果の概要（英文）：We aim to solve optimization problems that can be represented as linear systems with combinatorial constraints. Fundamental constraints in the field of combinatorial optimization include matroid and knapsack constraints. We focus on problems with those constraints. In this project, we proposed efficient algorithms with theoretical analysis for the optimal matroid partition problem, robust combinatorial optimization problems, the fair allocation problem, and so on. We also worked on an unexpected direction such as online optimization.

研究分野：組合せ最適化

キーワード：マトロイド 公平割当 オンライン最適化

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

最適化分野において最も基本的な問題のひとつは、線形システムを満たす非負ベクトルを求めることである。古典的な研究により、この問題は効率的に解を計算するアルゴリズム(多項式時間アルゴリズム)をもつことが知られている。

この問題の自然な拡張として、ベクトルの非ゼロ要素の集合に何らかの組合せ的な制約を課した問題が考えられる。単純な例として、非ゼロ要素数がある数以下という制約が挙げられる。この制約は単純ながら、圧縮センシングなどで現れ、重要な制約のひとつである。しかし、このような単純な制約であっても、組合せ的な制約を課すと問題が計算量的に難しくなる(NP困難である)ことが知られている。この困難性を回避するべく、多くの既存手法は、制約を緩和・近似するアプローチを用いている。

しかし、どの要素が非ゼロであるかは本質的な情報であり、非ゼロ要素に関する制約を近似することは極力避けたい。一方、この情報が与えられれば(制約なしの場合に対する)既存のアルゴリズムで解くことができる。そこで、既存研究と異なり、問題全体の組合せ的な構造を利用したアプローチが考えられる。本研究課題では、組合せ最適化や周辺分野でよく用いられる制約に着目し、組合せ的な制約をもつ問題に取り組む。

### 2. 研究の目的

組合せ的な制約をもつ線形システムの解を求める問題は、一般には前述した通り計算量的に困難な問題である。本研究課題は、問題の特別な構造を利用することで速く(多項式時間、あるいは自明な全探索よりは速く)解くことを目標とする。線形システムを特定のものに固定すれば、この問題はいわゆる組合せ最適化問題である。つまり、少なくとも対応する組合せ最適化問題も解ける必要がある。そこで、組合せ最適化の理論を拡張することも本研究課題のスコープに含める。

### 3. 研究の方法

本研究では、組合せ的な制約の構造に応じて問題のアルゴリズムを構築する。特に、組合せ最適化において重要な制約である要素数制約(非ゼロ要素数の数が少ない解)、マトロイド制約、ナップサック制約(選んだ要素の重みの和が容量以下になるように要素を選択)に着目する。さらに、機械学習、人工知能、アルゴリズム的ゲーム理論などの周辺分野に現れる制約も扱う。これらの制約に対して、以下のようなアルゴリズムを検討する。

- 固定パラメータアルゴリズム: 解の非ゼロ要素数や線形システムの疎性といった問題のパラメータが小さいときに高速に動作する(特に、計算量の増え方がパラメータに依存しない)アルゴリズムである。
- ピボットアルゴリズム: ピボットと呼ばれる、非ゼロ要素とゼロ要素を入れ替える操作を繰り返しながら解を計算するアルゴリズムである。本研究の対象の特殊ケースである線形計画問題や線形相補性問題に対してはこのタイプのアルゴリズムが知られている。

### 4. 研究成果

本研究課題を進めていく中で、様々な組合せ最適化問題に対する研究成果を得た。以下に代表的なものを述べる。これらの他にも、オンライン最適化など、当初は予定していなかった方向性の研究成果も得ている。

#### (1) 最適マトロイド分割問題:

この問題は、組合せ最適化において古くから知られているマトロイド分割問題の自然な一般化である。マトロイド分割問題は、マトロイドの台集合を $k$ 個の独立集合に分割する問題である。そのような分割の中で、何らかの指標で最も良い分割を求める問題が、最適マトロイド分割問題である。

マトロイド分割問題は効率的に解けることが知られている一方、最適マトロイド分割問題はほとんど未解決であった。本研究では、様々な目的関数について、最適マトロイド分割問題の計算複雑度の解析・分類を行った。この成果は査読付き論文誌 *Algorithmica* に掲載済みである。

(2) ロバスト組合せ最適化問題：

古典的な最適化問題では入力データに不確実性がないが、現実にはそうとは限らない。様々な意味での不確実性があり得るが、ここでは目的関数が不確実であり制約が独立性システムと呼ばれる構造をもつような組合せ最適化問題に着目する。独立性システムは、ナップサック制約やマトロイドを含む数理構造である。

目的関数が不確実なとき、自分の選んだ（確率的な）解に対する最悪の目的関数値をできるだけ良くすることが目標となる。この研究の主結果は、アルゴリズムを与えるフレームワークを提案し、近似比の保証を与えたことである。技術的には、線形計画問題を解くための楕円体法に組合せ最適化問題の近似アルゴリズムを組み合わせる。このフレームワークを用いて、具体的な目的関数や制約（特にナップサック制約やマトロイド制約）に対する近似アルゴリズムを与えた。その近似比は目的関数が定まっている場合とほぼ同じ値であり、先行研究を大幅に改善することを示した。この成果は査読付き論文誌 *Algorithmica* に掲載済みである。

また、他の不確実性として、容量が未知であるナップサック制約をもつ劣モジュラ関数最大化問題の研究にも取り組んだ。劣モジュラ関数最大化問題は組合せ最適化の理論で古くから研究されている問題である。本研究では、最悪の状況を出るだけ良くするためのポリシーを提案した。この成果は査読付き論文誌 *SIAM Journal on Discrete Mathematics* に掲載済みである。

(3) 可分財と不可分財が存在するときの公平割当問題：

公平割当とは、複数のエージェントに財を「公平に」割り当てることである。ここでは、各エージェントの効用は、欲しい財の中で割り当てられた量として定める。このとき、割当は線形システムで表現できる。公平さの定義には様々なものがあるが、よく用いられる公平さのひとつである「ナッシュ社会厚生を最大にする」割当に着目する。財がすべて可分あるいは不可分のときは、既存研究によりナッシュ社会構成最大の割当が効率的に求められることが知られている。一方、本研究では可分財と不可分財が混在する場合を扱う。

そのために、この問題を凸最適化の枠組みで捉える。解きたい問題は、可分財だけの状況は連続の  $M$  凸集合、不可分財だけの状況は離散の  $M$  凸集合上で、対称狭義凸関数を最小化することと見ることができる。本研究の問題は連続と離散の  $M$  凸集合のミンコフスキー和で得られる集合上での最小化問題となる。この「連続と離散のハイブリッド」の問題は、連続と離散の場合と性質が異なる。一方で、本研究で近接定理と呼ばれる性質は引き継がれることを示した。これを応用することにより、公平割当の問題の計算量を分類した。この成果は査読付き国際会議 ICALP に採択されている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計15件（うち査読付論文 15件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 8件）

1. 著者名 Yasushi Kawase, Koichi Nishimura, Hanna Sumita	4. 巻 -
2. 論文標題 Minimizing Symmetric Convex Functions over Hybrid of Continuous and Discrete Convex Sets	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Proceedings of the 51st EATCS International Colloquium on Automata, Languages, and Programming	6. 最初と最後の頁 to appear
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yasushi Kawase, Atsushi Miyachi, Hanna Sumita	4. 巻 -
2. 論文標題 Stochastic Solutions for Dense Subgraph Discovery in Multilayer Networks	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the 16th ACM International Conference on Web Search and Data Mining	6. 最初と最後の頁 886 ~ 894
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1145/3539597.3570444	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yasushi Kawase, Hanna Sumita	4. 巻 -
2. 論文標題 Online Max-min Fair Allocation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Algorithmic Game Theory. SAGT 2022	6. 最初と最後の頁 526 ~ 543
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-031-15714-1_30	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yasushi Kawase, Hanna Sumita, Yu Yokoi	4. 巻 -
2. 論文標題 Random Assignment of Indivisible Goods under Constraints	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the 32nd International Joint Conference on Artificial Intelligence	6. 最初と最後の頁 2792 ~ 2799
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Ayumi Igarashi, Yasushi Kawase, Warut Suksompong, Hanna Sumita	4. 巻 -
2. 論文標題 Fair Division with Two-Sided Preferences	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the 32nd International Joint Conference on Artificial Intelligence	6. 最初と最後の頁 2756 ~ 2764
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Hiromichi Goko, Akitoshi Kawamura, Yasushi Kawase, Kazuhisa Makino, Hanna Sumita	4. 巻 -
2. 論文標題 Online Scheduling on Identical Machines with a Metric State Space	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proceedings of the 39th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2022)	6. 最初と最後の頁 32:1 ~ 32:21
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4230/LIPIcs.STACS.2022.32	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hiromichi Goko, Ayumi Igarashi, Yasushi Kawase, Kazuhisa Makino, Hanna Sumita, Akihisa Tamura, Yu Yokoi, Makoto Yokoo	4. 巻 144
2. 論文標題 Fair and Truthful Mechanism with Limited Subsidy.	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Games and Economic Behavior	6. 最初と最後の頁 49 ~ 70
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hanna Sumita, Shinji Ito, Kei Takemura, Daisuke Hatano, Takuro Fukunaga, Naonori Kakimura, Ken-ichi Kawarabayashi	4. 巻 -
2. 論文標題 Online Task Assignment Problems with Reusable Resources.	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proceedings of the 36th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-22)	6. 最初と最後の頁 5199 ~ 5207
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kawase Yasushi, Kimura Kei, Makino Kazuhisa, Sumita Hanna	4. 巻 83
2. 論文標題 Optimal Matroid Partitioning Problems	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Algorithmica	6. 最初と最後の頁 1653 ~ 1676
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00453-021-00797-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasushi Kawase, Hanna Sumita	4. 巻 -
2. 論文標題 On the Max-min Fair Stochastic Allocation of Indivisible Goods	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the 34th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-20)	6. 最初と最後の頁 2070 ~ 2078
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Daisuke Hatano, Yuko Kuroki, Yasushi Kawase, Hanna Sumita, Naonori Kakimura, Ken-ichi Kawarabayashi	4. 巻 -
2. 論文標題 Non-zero-sum Stackelberg Budget Allocation Game for Computational Advertising	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the 16th Pacific Rim International Conference on Artificial Intelligence (PRICAI 2019)	6. 最初と最後の頁 568 ~ 582
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasushi Kawase, Hanna Sumita	4. 巻 -
2. 論文標題 Randomized Strategies for Robust Combinatorial Optimization	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the 33rd AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI 2019)	6. 最初と最後の頁 7876 ~ 7883
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yasushi Kawase, Hanna Sumita and Takuro Fukunaga	4. 巻 33
2. 論文標題 Submodular Maximization with Uncertain Knapsack Capacity	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 1121 ~ 1145
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 Hanna Sumita, Shinji Ito, Kei Takemura, Daisuke Hatano, Takuro Fukunaga, Naonori Kakimura, Ken-ichi Kawarabayashi
2. 発表標題 Online Task Assignment Problems with Reusable Resources.
3. 学会等名 The 36th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-22) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yasushi Kawase and Hanna Sumita
2. 発表標題 On the Max-min Fair Stochastic Allocation of Indivisible Goods
3. 学会等名 The 34th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-20) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

## 8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
シンガポール	National University of Singapore			