

令和 2 年 6 月 16 日現在

機関番号：32641

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K12692

研究課題名(和文) 悪条件連立一次方程式に対する高精度な精度保証付き数値計算技術の開発

研究課題名(英文) Research and development of a verification method for ill-conditioned linear systems

研究代表者

南畑 淳史 (Minamihata, Atsushi)

中央大学・理工学部・助教

研究者番号：70754787

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円

研究成果の概要(和文)：悪条件連立一次方程式に対する高精度な精度保証付き数値計算法の開発を行った。特に大規模で悪条件な連立一次方程式に適した誤差評価式を提案した。Highamのテスト行列を用いて既存の誤差評価式よりも高精度であることを示した。また、連立一次方程式に適した誤差評価式に関連して、null spaceを用いた鞍点型の係数行列を持つ連立一次方程式の誤差評価法を提案した。その過程でNull spaceの精度保証付き数値計算が必要となり、3つのNull spaceの精度保証付き数値計算法を開発した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

科学技術計算において、連立一次方程式を解く事は最も基本的な問題であり、解の信頼性を担保する技術の開発は重要である。今後、計算機の性能の向上に伴いより大規模な問題を解くことが予想される。その際に、丸め誤差により解の信頼性が損なわれる。本研究は解の信頼性の向上に寄与する研究である。また、本研究成果の一部は精度保証付き数値計算のソフトウェアのINTLABに組み込まれ、多くのユーザの精度保証付き数値計算に利用されている。

研究成果の概要(英文)：We developed a verification method for ill-conditioned linear systems. In particular, we focus on large and ill-conditioned linear systems and proposed a verification method. We showed our proposed method gives tighter error bounds than previous methods in Higham's test matrices.

We developed a verification method for symmetric saddle point linear systems using null space method and verification methods for a basis of the null space of a matrix.

研究分野：精度保証付き数値計算

キーワード：精度保証付き数値計算 悪条件連立一次方程式 誤差評価

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

現代のコンピュータは IEEE754 標準規格に沿った倍精度浮動小数点数演算を提供している。倍精度浮動小数点演算は高速である反面、丸め誤差が発生し、計算結果が必ずしも正しいとは限らない。近年、スーパーコンピュータの京にて 100 万次元の固有値問題が解かれるなど、非常に大規模な問題が解かれる時代となった。このような大規模な問題では、良条件の問題でさえ 10 桁程度しか近似解があていない。問題が大規模になればなるほど、精度の劣化が表面化し、信頼性を損なう事となる。そのため、計算結果の信頼性を担保する技術の重要度は年々増してきている。

計算結果の信頼性を担保する技術として、精度保証付き数値計算法という技術がある。精度保証付き数値計算法では、真の解と近似解との誤差評価式を構築し、コンピュータを使って、丸め誤差も考慮しながら、検証を行う。

科学技術計算において、連立一次方程式を解く事は最も基本的な問題であり、応用としても、非線形方程式の解を求めるアルゴリズムや固有値問題の少数の固有値を求める際にも使用されるなど数えきれないほどの応用がある。しかし、近年の問題の大規模化に伴い、解の信頼性が損なわれつつあり、時間を掛けた計算結果が正しいかどうかは分からない状況となっている。

2. 研究の目的

本研究課題では、連立一次方程式を高精度に解を求め、具体的な値で誤差評価を与える事で、解の信頼性を担保する技術の開発を行う。特に大規模化に伴う悪条件性に対して頑健な誤差評価式を使うことによってシャープな評価を与え、解の信頼性を与えることを目的としている。

3. 研究の方法

本研究は、H 行列の性質を用いて、悪条件連立一次方程式に対する高精度な精度保証付き数値計算法の開発する。連立一次方程式の精度保証付き数値計算法の根幹を成す誤差評価式の構築を通じて、決定版といえる精度保証付き数値計算法の構築を目指している。

4. 研究成果

大規模な連立一次方程式に適した誤差評価式の提案に関して、反復改良が出来る誤差評価式を提案した。この成果は査読付きの論文誌である Journal of Computational and Applied Mathematics に掲載された。提案手法(III)は Rump の手法[1](I)および Minamihata et al. の手法[2](II)に比べて、高精度であり、図 2. や図 4. で表れる誤差評価の過大評価を抑えていることが分かる。また、これらの過大評価は大規模な行列になればなるほどあらわれることから大規模な連立一次方程式に適した誤差評価式となっていることが分かる。また、計算が可能な誤差評価式 I, II, III の基となった H 行列の誤差評価式(IV)と比べてもほぼ同等の精度が出ているため、計算が可能にするために過大評価する箇所がかなりシャープに抑えられていることが分かる。

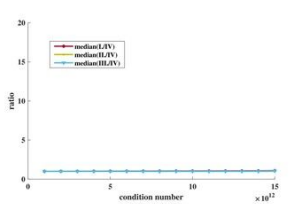


図 1.randsvdでの既存手法と提案手法の比較 (n=10000,mode=1)

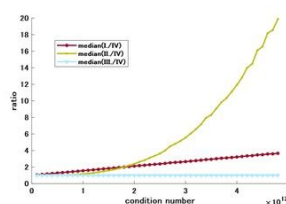


図 2.randsvdでの既存手法と提案手法の比較 (n=10000,mode=2)

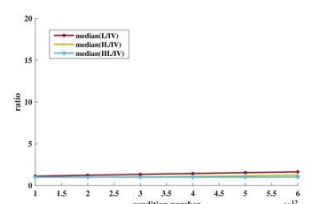


図 3.randsvdでの既存手法と提案手法の比較 (n=10000,mode=3)

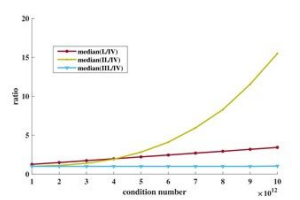


図 4.randsvdでの既存手法と提案手法の比較 (n=10000,mode=4)

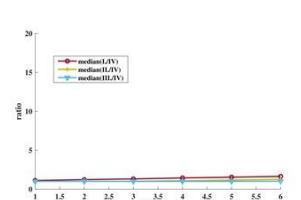


図 5.randsvdでの既存手法と提案手法の比較 (n=10000,mode=4)

[1] S.M. Rump. Accurate solution of dense linear systems, Part II: Algorithms using directed rounding. Journal of Computational and Applied Mathematics (JCAM), 242:185-212, 2013

[2] Atsushi Minamihata, Kouta Sekine, Takeshi Ogita, Siegfried M. Rump, Shin'ichi Oishi, Improved error bounds for linear systems with H-matrices, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, Vol. E6-N, No. 3, pp. 377-382, Jul. 2015.

また、研究計画段階では内積に特化したアルゴリズムを考案する予定であったが、前述の成果の応用研究である Null space を用いた鞍点型の係数行列を持つ連立一次方程式の誤差評価法が進展したために、こちらを重点的に研究した。その過程で Null space の精度保証付き数値計算が必要となり、3 種類の Null space の精度保証付き数値計算法を開発した。直交性が保たれている方法や直交性は持たないが高速性を重視した方法を開発し、用途に応じて方法を選択できる。この結果は査読付きの国際論文誌に投稿した。Null space を用いた鞍点型の係数行列を持つ連立一次方程式の誤差評価法は Null space の論文誌の結果が出た後に投稿するために準備を進めている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Minamihata Atsushi, Ogita Takeshi, Rump Siegfried M., Oishi Shin'ichi	4. 巻 369
2. 論文標題 Modified error bounds for approximate solutions of dense linear systems	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Computational and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 112546 ~ 112546
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.cam.2019.112546	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 0件/うち国際学会 4件）

1. 発表者名 R. KOBAYASHI, M. LANGE, A. MINAMIHATA, AND S.M. RUMP
2. 発表標題 Numerical verification of a basis of the null space of rectangular matrix
3. 学会等名 ICIAM2019(International Congress on Industrial and Applied Mathematics) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 A. Minamihata, T. Ogita, S. M. Rump and S. Oishi
2. 発表標題 Two verification methods for linear systems using H-matrix
3. 学会等名 The 18th International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Verified Numerical Computations (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ryo Kobayashi, Atsushi Minamihata and Shin'ichi Oishi
2. 発表標題 Verification method for solution of symmetric saddle point linear system with null space method
3. 学会等名 The 18th International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Verified Numerical Computations (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Atsushi Minamihata, Takeshi Ogita and Shin'ichi Oishi
2. 発表標題 Accurate error bounds for linear systems using H-matrices
3. 学会等名 ANZIAM 2018, Hotel Grand Chancellor, Australia, 5 February 2018.
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 南畑淳史, 荻田武史, 大石進一
2. 発表標題 行列積の下向き丸めと事前誤差評価を用いた連立一次方程式の精度保証付き数値計算法向けの高精度な誤差評価式の提案
3. 学会等名 日本応用数理学会 第14回 研究部会連合発表会, 大阪大学, 2018年3月.
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 南畑淳史, 荻田武史, 大石進一
2. 発表標題 単精度で作成された近似逆行列は条件数を下げる効果を持つのか?
3. 学会等名 日本応用数理学会 2017年 年会, 武蔵野大学, 2017年9月.
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 南畑 淳史
2. 発表標題 高精度な近似逆行列を求めるアルゴリズムがうまく動かない例題の作成法
3. 学会等名 第1回 精度保証付き数値計算の実問題への応用研究集会, 西日本総合展示場, 2017年12月.
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 寺尾 剛史, 尾崎 克久, 南畑 淳史
2. 発表標題 実対称正定値行列を係数行列とする連立一次方程式の数値解に対する精度保証法
3. 学会等名 2017年並列 / 分散 / 協調処理に関する『秋田』サマー・ワークショップ (SWoPP2017), 秋田アトリオンビル, 2017年7月
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Atsushi Minamihata, Takeshi Ogita and Shin'ichi Oishi
2. 発表標題 A note on error bounds for large linear systems
3. 学会等名 Dagstuhl Seminar 17481, Dagstuhl, Germany, December, 2017. (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考