

令和 2 年 6 月 17 日現在

機関番号：32664

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K13764

研究課題名(和文) 非完備市場における金融派生証券に対する最適ヘッジ戦略と数値計算

研究課題名(英文) Optimal hedging strategies and its numerical methods under the incomplete markets

研究代表者

今井 悠人 (Imai, Yuto)

二松學舎大學・国際政治経済学部・講師

研究者番号：60732229

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：「非完備市場における金融派生証券に対する最適ヘッジ戦略と数値計算」に関して、数学的な面と数値計算可能性の面との両面から研究を行った。特に金融実務への応用を念頭に(i)ヘッジ戦略の表現を数学的に導出し、数値計算可能な形に表現する、(ii)実際に様々なモデルに対してその表現を適用することで数値計算を行い、その結果について数学的に厳密な表現から得られた結果や異なった手法で得られた結果との比較を行った。数値計算手法としては、研究のみならず実務においても幅広く適用可能な手法として、高速 Fourier変換を利用したCar-Madan methodを採用した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究により、Local Risk Minimization戦略を採用した場合のEuropean Call optionの数値計算可能な式をいくつかのモデルに対して数学的に導出することができた。従来はMonte Carlo法を用いてのみ計算可能であったが、本研究成果を用いることで高速Fourier変換を用いて計算することが可能となった。これにより、従来に比して極めて高速に計算結果が得られることがわかった。これにより、option価格を高速に計算可能になるのみならず、現実的な時間でパラメータ推定を行うことが可能となった。

研究成果の概要(英文)：We study both the mathematical and numerical aspects of optimal hedging strategies and numerical calculations for financial derivative securities under the incomplete markets.

In particular, the following two points were focused on the application of the study to financial practice: (i) mathematically derive a representation of the hedging strategy and express it in a numerically computable form, (ii) actually perform numerical calculations by applying the representations to various models and compare the results with those obtained from mathematically rigorous representations and with those obtained by different methods. The Car-Madan method, which uses a fast Fourier transform, was adopted as a numerical calculation method that is widely applicable not only in research but also in practice.

研究分野：数理ファイナンス、数値計算

キーワード：Local risk minimization Mean-variance hedging Fast Fourier transform Malliavin calculus Levy processes

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

本研究では、資産価格の確率過程がジャンプ型確率過程で記述される非完備市場を考える。特に、ジャンプを含む確率ポラティリティーモデルの有用性が多いの実証研究でも示されていることから、その代表モデルである Barndorff-Nielsen and Shephard モデル(BNS モデル) 並びに time-changed Lévy 過程モデルを研究対象とする。BNS モデルは、係数がランダムな確率微分方程式で記述される代表的なモデルであり、実証分析の観点からもその重要性が指摘されている。最適ヘッジ戦略としては主として locally risk-minimizing 戦略(LRM 戦略)を考える。これは非完備市場の最適ヘッジ戦略として最も代表的なものであり、20 年以上にわたり盛んに研究が行われている。しかし、その研究は LRM 戦略の数学的特性を明らかにすることを主眼としたものであり、具体的な計算方法に関する成果は殆ど得られていない。また、非完備市場に於ける最適ヘッジ戦略の具体的な導出は、ファイナンス理論を研究する上で大変重要な課題であるにも拘わらずあまり研究がなされていない。申請者は、Lévy 過程モデルが非完備市場を研究する上で最も重要な確率過程であると考えている。その上で、Lévy 過程を研究するツールとしては Malliavin 解析が最も適していると考えている。Malliavin 解析を用いた数理ファイナンスという点では、ヨーロッパに於いて盛んに研究が行われている。特に、ノルウェーのオスロ大学の研究グループが最も精力的に研究を行っている。

### 2. 研究の目的

「非完備市場における金融派生証券に対する最適ヘッジ戦略と数値計算」に関して、数学的な面と数値計算可能性の面との両面から研究を行う。研究目的は、特に金融実務への応用を念頭に(1)ヘッジ戦略の表現を数学的に導出し、数値計算可能な形に表現する、(2)実際に様々なモデルに対してその表現を適用することで数値計算を行い、その結果について数学的に厳密な表現から得られた結果や異なった手法で得られた結果との比較を行う。数値計算手法としては、研究のみならず実務においても幅広く適用可能な手法を考える。ヘッジ戦略の表現導出や改良の際には、確率解析的手法を用いる。また、ソフトウェア面での高速化と合わせて、日々進歩するハードウェア面でも適用可能なものがあれば積極的に取り入れて、数値計算の高速化と高精度化の研究を行う。

### 3. 研究の方法

(1) Lévy 過程に関する確率微分方程式の解で資産価格が記述されるモデルに対して、Malliavin 解析を用いて locally risk-minimizing 戦略の一般式を導出する。その一般式を数値解析可能な形として導出し、FFT を用いて数値計算を行う。その際、モンテカルロ法との比較並びにデルタヘッジをはじめとするヘッジ戦略との比較を行う。  
(2) BNS モデル に対して、(1) と同様の研究を行う。  
(3) Time-changed Lévy モデル に対して、(1)や(2)と同様の研究を行う。  
(4) Carr-Madan の方法を改良し精度や速度の向上をはかり、従来の数値計算手法との比較を行う。

### 4. 研究成果

以下の4本の査読付英語論文が受理、掲載された:

- (1) Arai, T., Imai, Y., & Suzuki, R. (2017). Local risk-minimization for Barndorff-Nielsen and Shephard models. *Finance and Stochastics*, 21(2), 551-592.
- (2) Arai, T., & Imai, Y. (2017). On the difference between locally risk-minimizing and delta hedging strategies for exponential Lévy models. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 34(3), 845-858. <https://doi.org/10.1007/s13160-017-0268-6>
- (3) Takuji Arai & Yuto Imai (2018) A numerically efficient closed-form representation of mean-variance hedging for exponential additive processes based on Malliavin calculus, *Applied Mathematical Finance*, 25:3, 247-267.
- (4) Arai T., Imai Y., Nakashima R. (2018) Numerical Analysis on Quadratic Hedging Strategies for Normal Inverse Gaussian Models. In: Kusuoka S., Maruyama T. (eds) *Advances in Mathematical Economics*. *Advances in Mathematical Economics*, vol 22. Springer, Singapore

以下の国際研究集会に招待講演者として発表を行った:

- (1) How to model option prices under incomplete markets - with short history of mathematical finance, Seminar nasional matematika dan terapannya 'Mathematics in Theory and Application to Nature', Universitas Jenderal Soedirman, Indonesia, 2018
- (2) Transform methods and numerical analysis for exponential Lévy models, The First SMU-TMU Joint Workshop on Mathematical Finance and Financial Engineering, Singapore, 2019
- (3) A Numerically Efficient Closed Form Representation of Mean-Variance Hedging for

Exponential Additive Processes and Hardware Acceleration for Financial Analysis, Soedirman's International Conference on Mathematics and Applied Sciences, Indonesia, 2019

(4) Monte Carlo simulations for finance and its hardware accelerations, School on Mathematical Modeling and Simulation, State Islamic University of Syarif Hidayatullah Jakarta, Indonesia, 2019

以下の国内学会・研究集会で研究発表を行った:

(1) On the difference between locally risk-minimizing and delta hedging strategies for exponential Le'vy models, 2017年度中之島ワークショップ「金融工学・数理計量ファイナンスの諸問題 2017」, 2017

(2) Local Risk Minimization Strategies and Transform Techniques, 丸の内 QF セミナー, 2018

(3) Monte Carlo simulations for finance and its hardware accelerations, 第1回八戸数学応用数理研究集会, 2018

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Arai Takuji, Imai Yuto	4. 巻 25
2. 論文標題 A numerically efficient closed-form representation of mean-variance hedging for exponential additive processes based on Malliavin calculus	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Applied Mathematical Finance	6. 最初と最後の頁 247 ~ 267
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1080/1350486X.2018.1506259">https://doi.org/10.1080/1350486X.2018.1506259</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T. Arai, Y. Imai and R. Nakashima	4. 巻 22
2. 論文標題 Numerical analysis on quadratic hedging strategies for normal inverse Gaussian models	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Advances in Mathematical Economics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1007/978-981-13-0605-1_1">https://doi.org/10.1007/978-981-13-0605-1_1</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Arai Takuji, Imai Yuto	4. 巻 34
2. 論文標題 On the difference between locally risk-minimizing and delta hedging strategies for exponential Levy models	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 845 ~ 858
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1007/s13160-017-0268-6">https://doi.org/10.1007/s13160-017-0268-6</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Arai Takuji, Imai Yuto, Suzuki Ryoichi	4. 巻 21
2. 論文標題 Local risk-minimization for Barndorff-Nielsen and Shephard models	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Finance and Stochastics	6. 最初と最後の頁 551 ~ 592
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1007/s00780-017-0324-8">https://doi.org/10.1007/s00780-017-0324-8</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 7件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 Imai, Yuto
2. 発表標題 A Numerically Efficient Closed Form Representation of Mean-Variance Hedging for Exponential Additive Processes and Hardware Acceleration for Financial Analysis
3. 学会等名 Soedirman ' s International Conference on Mathematics and Applied Sciences (Indonesia) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Imai, Yuto
2. 発表標題 Monte Carlo simulations for finance and its hardware accelerations
3. 学会等名 School on Mathematical Modeling and Simulation, State Islamic University of Syarif Hidayatullah Jakarta (Indonesia) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 今井悠人
2. 発表標題 Monte Carlo simulations for finance and its hardware accelerations
3. 学会等名 第1回八戸数学応用数理研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 今井悠人
2. 発表標題 Local Risk Minimization Strategies and Transform Techniques
3. 学会等名 丸の内QFセミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuto Imai
2. 発表標題 How to model option prices under incomplete markets - with short history of mathematical finance
3. 学会等名 Seminar nasional matematika dan terapannya 'Mathematics in Theory and Application to Nature', Universitas Jenderal Soedirman (Indonesia) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuto Imai
2. 発表標題 Transform methods and numerical analysis for exponential Le'vy models
3. 学会等名 The First SMU-TMU Joint Workshop on Mathematical Finance and Financial Engineering (Singapore) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 今井悠人
2. 発表標題 On the difference between locally risk-minimizing and delta hedging strategies for exponential Le'vy models
3. 学会等名 2017年度中之島ワークショップ「金融工学・数理計量ファイナンスの諸問題 2017」(招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----