

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 4 年 6 月 16 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K14150

研究課題名(和文) 圏のモジュライ空間における周期写像と導来代数幾何

研究課題名(英文) Period map of the moduli space of categories and derived geometry

研究代表者

岩成 勇 (Iwanari, Isamu)

東北大学・理学研究科・准教授

研究者番号：70532547

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、圏のモジュライ空間とそのホッジ理論的不変量をとったときの不変量の振る舞いや応用に関して研究を行った。以下のような成果が得られた。HochschildコホモロジーとHochschildホモロジーのペアを考えよう。安定圏から得られるそのペアに代数構造をいれる方法の概念的な一般化の方法を与えた。さらに、その代数構造のモジュライ理論的な意味づけを発見し、定式化と証明を行った。さらに、安定圏の族から得られる周期的巡回ホモロジーの族に接続が入ることを二つの方法で与えた。一つは上記のペアの理論の応用で、もう一つはfactorizationホモロジーの自然変形を用いるものである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

周期写像を圏に拡張することで様々な出自の圏をして統合し、ホッジ理論的な考察ができ圏論的なミラー対称性などにも応用があると考えられる。また、大局的にはバラバラになりがちな数学の分野を統合するための一助になり数学の専門外のひとにも数学を身近にする効果があると考えられる。

研究成果の概要(英文)：In this research project, I have studied the Hodge-theoretic invariants arising from a family of stable infinity-categories. I would like to summarize the results which I obtained. Let us consider the Hochschild pair. I gave a conceptual and simple construction of the algebraic structure on the Hochschild pair associated to a stable infinity-category. Moreover, I discovered the moduli-theoretic interpretation of this algebraic structure on the Hochschild pair. I have constructed D-module structure on the periodic cyclic homology arising from a family of stable infinity-categories. I discovered two methods. The first method is an application of the Hochschild pair. The second method is to use the canonical extension of factorization homology.

研究分野：代数幾何

キーワード：安定無限圏 ホッホシルトホモロジー 変形理論 周期写像 導来代数幾何

## 1. 研究開始当初の背景

圏の族を考える背景・動機について説明する。代数多様体や関連する研究において、代数多様体そのものではなくそこから圏を構成して圏を研究することが重要かつ強力な見方であることが近年わかってきた。なぜ強力で面白い見方であるか、2つの点から説明したい。第一の点として、色々な数学的な対象から圏が得ることができ、圏同値を通して代数幾何と他の分野の非自明な結びつきが得られ、様々なアイデアを輸入・輸出することが出来るということである。例えば、代数多様体・スキームからは(準)接続層の導来圏、シプレクティック多様体からは深谷圏、箆(quiver)や非可換代数や量子群からは表現の三角圏、特異点からは特異点の圏(あるいは行列因子化圏)が得られる。これら出生の相異なる圏同士がしばしば圏同値になり非自明な結果を導く。第二の点は、これらの圏は、もとの対象の情報の本質的な部分をかなり持っている点である。例えば代数多様体に対してその接続層の導来圏  $D(X)$  を考える。適当な構造を持つ圏に対してはその  $K$  理論を考えることができるが  $D(X)$  (正確にはその増強版)の  $K$  理論は元の  $X$  のモチーフ的データとみなせる。 $D(X)$  の Hochschild ホモロジーとそこから得られるいくつかのホモロジーを考えると、それらは  $X$  の Hodge 理論的な情報を取り出す(Hochschild ホモロジーは圏の微分形式であるといつてよい)。

## 2. 研究の目的

安定圏を空間(幾何学対象)として考える(非可換代数幾何などと呼ばれたりする)研究は近年盛んに研究されている。本研究の基本的な理念・方針は、今まで研究対象の中心であった圏単体ではなく圏の族を研究対象の中心に置き、そこから生まれるミステリアスではあるが豊かな不変量の構造の研究や(単一の)圏への応用を研究するものである。

## 3. 研究の方法

代数幾何との類似に注意しつつ、ホモトピー論と代数幾何を融合し発展しているホモトピー的代数幾何・導来代数幾何や高次圏論的な手法、具体的な応用を念頭に置き研究する。

## 4. 研究成果

本研究では、圏のモジュライ空間とそのホッジ理論的不変量をとったときの不変量の振る舞いや応用に関して研究を行った。安定無限圏の Hochschild コホモロジーと Hochschild ホモロジー(正確には複体やスペクトラ)の対に Cartan calculus のような代数構造をいれるきわめて一般的かつ観念的な方法を見つけた。これは Kontsevich-Soibelman の方法とは全く異なる新しい方法で一般化するものであり、それは以下の研究成果でも基盤となるものである。つづいて安定無限圏の族をそこから得られる相対的 Hochschild ホモロジーと各種 Hochschild 型不変量の観点から研究した。Hochschild ホモロジーを導来代数幾何的な自由ループ空間上に同変的に変形(延長)する方法を見出していた。これと自由ループ空間上の同変層と  $D$  加群の関係を用いると圏の族に対して Gauss-Manin 接続の類似が構成できる。構成には実は上記の Hochschild 対(Hochschild コホモロジーとホモロジー)だけではなく Hochschild 対のモジュライ理論的な解釈が必要になる。Hochschild 対のモジュライ的意味づけを発見し証明した。そこでは cyclic deformation(巡回変形)という変形概念が重要になる。この Hochschild 対のモジュライ理論的な解釈を 2020 年度中に "Moduli theory associated to Hochschild pairs" というプレプリントにまとめた(arXiv で公開中)。またこれらを用いた自由ループ空間上の同変層への変形(延長)の構成を "On D-modules of categories I" でまとめた(arXiv で公開中)。また 2020 年度中につぎのような発見をした: 代数の族を考えるとその factorization ホモロジー(位相的カイラルホモロジー)は写像スタック(mapping stack)に自然に変形・延長される。特殊な場合として上記の Hochschild ホモロジーの自由ループ空間への変形が非常に簡単に構成できる(即ち Gauss-Manin 接続の類似の新しい構成法を与える)。これにより Hochschild ホモロジーの自由ループ空間への持ち上げは factorization ホモロジーの延長として広大に一般化されただけでなく、構成の種々の関手性や局所化完全列を保つことなどが簡明に得られた。factorization ホモロジーの写像スタックへの自然変形(拡大)を応用してきわめて一般的な形で定式化し一般論を整備した。そのことを用いて、安定無限圏の族から周期的巡回ホモロジー(periodic cyclic homology)の族に Hodge 構造の類似の構造が入ることに応用した。その構造の構成についてはもう一つの構成法を見つけている。それは、Hochschild ホモロジーと Hochschild コホモロジーの対に入る代数構造とそのモジュライ理論的な解釈を見つけたうえでそれを応用するものであった。2021年度にはその技術的詳細をかなり簡略化し見通しをよくすることに成功した。さらに私自身で見つけた二つの構成法は各々長所を持っており、比較することが重要となる。これら一見異なる構成法たちは同じものを構成することを、Koszul 双対性などを応用することによって証明した。その結果は On D-modules of categories II として公開

中である。さら にこれらの理論を用いて Griffiths 横断性を示した。またこれらから思いついて CY 安定の圏に対する Bogomolov-Tian-Todorov 定理を示した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Isamu Iwanari	4. 巻 97
2. 論文標題 Differential calculus of Hochschild pairs for Infinity-categories	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 SIGMA (2020) 97 (57pages), Special Issue on primitive forms and related topics in the honor of Kyoji Saito for his 77th birthday	6. 最初と最後の頁 57
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2020.097	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Isamu Iwanari	4. 巻 4
2. 論文標題 Motivic rational homotopy type	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Higher Structures	6. 最初と最後の頁 57--133
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2020.097	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Isamu Iwanari	4. 巻 11
2. 論文標題 Tannaka duality and stable infinity-categories	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Topology	6. 最初と最後の頁 469-526
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/topo.12057	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Isamu Iwanari	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Tannaka duality and stable-infinity categories	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Topology	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/topo.12057	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 11件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 Isamu Iwanari
2. 発表標題 Motivic rational homotopy types
3. 学会等名 Seminar at Regensburg University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Isamu Iwanari
2. 発表標題 Kodaira-Spencer maps, Hochschild and D-modules
3. 学会等名 ミラー対称性の諸相 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Isamu Iwanari
2. 発表標題 高次の淡中双対性とその周辺
3. 学会等名 代数的整数論とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Isamu Iwanari
2. 発表標題 Motivic Galois groups and Tannaka duality theory for stable infinity-categories
3. 学会等名 Arithmetic algebraic geometry seminar at Munster university (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 岩成勇
2. 発表標題 Hochschild pairs and equivariant deformations of categories
3. 学会等名 Interaction between algebraic geometry and QFT (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岩成勇
2. 発表標題 Cyclic Kodaira-Spencer morphisms and D-modules
3. 学会等名 HAG seminar (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 岩成勇
2. 発表標題 非可換代数幾何における周期写像について
3. 学会等名 代数学シンポジウム(東工大)(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岩成勇
2. 発表標題 Differential calculus of infinity-categories
3. 学会等名 Noncommutative deformations and moduli spaces (東大IPMU)(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岩成勇
2. 発表標題 非可換変形に対する周期写像とHochschild対の代数構造について
3. 学会等名 代数セミナー (神戸大) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Isamu Iwanari
2. 発表標題 Hochschildコホモロジーと変形理論 2, 4
3. 学会等名 Hochschildコホモロジーと変形理論 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Isamu Iwanari
2. 発表標題 Period mappings for noncommutative algebras
3. 学会等名 Lectures on higher structures and quantizations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------