

令和 3 年 6 月 3 日現在

機関番号：12102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K14151

研究課題名(和文) ジェット束の変形量子化による頂点代数の研究

研究課題名(英文) Vertex algebras as deformation quantization of jet bundles

研究代表者

桑原 敏郎 (Kuwabara, Toshiro)

筑波大学・数理解物質系・准教授

研究者番号：60524725

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：ハイパートリック多様体と呼ばれるシンプレクティック多様体の上に超局所化されたカイラル微分作用素の層を構成することで、新しいクラスの頂点代数を導入し、その構造を研究したほか、その結果を用いてサブレギュラーA型のアフィンW代数の構造を研究し、頂点代数としての生成元を具体的に記述するなどの結果を得た(生成元の記述に関する研究は元良直輝との共同研究)。  
また、有木小池代数に付随する有理チェレドニック代数の表現論に対して、その制限・誘導関手の間にマッキー型の公式が成立することを証明した(宮地兵衛・和田堅太郎との共同研究)。

研究成果の学術的意義や社会的意義

頂点代数は共形場理論などの場の量子論や可積分系における無限次元の対称性を記述するための数学的構造である。本研究プロジェクトでは、ハイパートリック多様体と呼ばれるシンプレクティック多様体上のジェット束という無限次元ベクトル束の量子化という方法で新しいクラスの頂点代数を導入しており、これは従来のアフィンリー代数や格子から出発して頂点代数を構成する方法とは異なる幾何学的・超局所解析的なアプローチである。

研究成果の概要(英文)：We constructed a sheaf of microlocalized chiral differential operators on a certain symplectic variety, called a hypertoric variety. By such construction, we introduced a new class of vertex algebras. By using such results, we studied the structure of a subregular W-algebra of type A, and gave explicit description of strong generators of the subregular W-algebra as a vertex algebra (joint work with Naoki Genra).  
Also, we studied the representation theory of a rational Cherednik algebra associated with an Ariki-Koike algebra, and established a Mackey-type formula between induction-restriction functors (joint work with Hyohe Miyachi and Kentaro Wada).

研究分野：表現論

キーワード：頂点代数 アフィンW代数 有理チェレドニック代数 ハイパートリック多様体 量子化

### 1. 研究開始当初の背景

有限次元単純リー代数に対して、その表現論はベイリンソン-ベルンシュタイン対応によって旗多様体上の微分作用素のなす層の加群の理論を用いて解析することができる。これは、単純リー代数の普遍包絡環が旗多様体の余接束の量子化、つまり非可換な変形によって実現される代数と同一視されることの端的な帰結である。

有理チェレドニック代数は複素鏡映群に付随するダンクル-オプダム作用素のなす非可換代数として導入されたが、そのうちの一部が中島籠多様体と呼ばれるシンプレクティック多様体の量子化であることが指摘され、それを端緒に超局所解析的な手法により有理チェレドニック代数の表現論の研究がなされてきた。また、同時期に単純リー代数の普遍包絡環から量子ハミルトン簡約の手法によって実現される代数である有限  $W$  代数も同様にスロドウィー多様体と呼ばれるシンプレクティック多様体の量子化としての一面が表現論の研究において重要な役割を果たした。それらの研究結果を背景に、ある種のシンプレクティック多様体の量子化として実現される非可換代数は有限次元単純リー代数の表現論と類似した豊かな表現論を持ち、その構造は下にあるシンプレクティック多様体の幾何学的構造や、多様体上で展開される超局所解析を通して研究されるべきという認識が広まった。

アフィンリー代数は無限次元リー代数の1種であり、有限次元単純リー代数の持つ構造を無限次元に拡張した類似物である。そのためベイリンソン-ベルンシュタイン対応のアフィンリー代数の表現論への拡張は以前から研究されてきた。アフィン旗多様体と呼ばれる無限次元多様体上の微分作用素のなす層を使う方法がそのひとつであるが、臨界レベルの表現論を解析するときには、有限次元の旗多様体の上にカイラル微分作用素と呼ばれる、微分作用素環の無限次元類似を構成する方法が用いられる。

頂点代数は無限次元リー代数であるアフィンリー代数の構造を一般化する代数構造であり、共形場理論などに現れる無限次元対称性を記述するために導入された。その公理はアフィンリー代数やヴィラソロ代数などの無限次元リー代数のものと比べて一見して非常に複雑であるが、それらのリー代数を一般化するアフィン  $W$  代数の数学的な構成などに必要な構造を記述している。研究代表者は以前に荒川・マリコフとの共同研究において、カイラル微分作用素の超局所解析的な類似を構成し、それを用いてスロドウィー多様体上に超局所化されたカイラル微分作用素を用いて臨界レベルにおけるアフィン  $W$  代数を実現した。

有限次元リー代数やその類似となる非可換代数の領域において、代数がある種のシンプレクティック多様体の量子化として実現されるという事実が、それらの代数の持つ種々の重要な性質を幾何学的・超局所解析的に理解し得るといふ新しい視点を導入するに至ったこと、またアフィンリー代数が有限次元単純リー代数の自然な無限次元類似であることから、特定のシンプレクティック多様体に対して、超局所化されたカイラル微分作用素のなす層を用いて頂点代数を構成することで、アフィンリー代数やアフィン  $W$  代数などと同様に豊かな構造を持つ新しいクラスの頂点代数が得られるのではないかと着想した。

### 2. 研究の目的

本研究計画では、シンプレクティック多様体の変形量子化における手法を応用して、中島籠多様体やハイパートリック多様体といった特定のシンプレクティック多様体の上に超局所化されたカイラルカイラル微分作用素のなす層として新しいクラスの頂点代数を構成し、その構造や表現論などを研究することを目的とした。また、臨界レベルにおけるアフィン  $W$  代数など既知の頂点代数に対しても幾何学的・超局所解析的な視点を応用することでこれまでに研究が行き届いていなかった構造などについて新しい結果を得ることも研究の目的のひとつであった。

### 3. 研究の方法

数学的な側面では、超局所化されたカイラル微分作用素の層の理論的な基礎付けを拡張し、(アフィン  $W$  代数を構成する際に用いられる)量子ドリンフェルド-ソコロフ簡約の構成を拡張することで、より多くのシンプレクティック多様体の上に超局所化カイラル微分作用素の層を具体的に構成するための枠組みを与える。そのような構成は、局所座標による表示から自動的に脇本実現の類似となる自由場表示を与えるため、それを頂点代数の構造やその表現論を研究するための足がかりとして利用することで研究が進展するものと期待していた。

本研究計画は研究代表者が個人で遂行する研究プロジェクトであるが、必要となる専門知識が多岐にわたるため、必要に応じて各分野を専門とする研究者と協力しつつ研究を遂行する。また、超局所化されたカイラル微分作用素の代数構造の計算は、人間の手で行うには非常に複雑で間違いをおかしやすい計算であるので、研究開始当初から数式処理システム

によるコンピュータでの計算を活用することを計画していた。

#### 4. 研究成果

(1) ハイパートーリック多様体はトーリック多様体のシンプレクティック類似として導入されたシンプレクティック多様体で、構造を組合せ論的に具体的に記述できる点で扱いやすい対象である。超局所化されたカイラル微分作用素の層の理論を拡張し、量子ドリンフェルド-ソコロフ簡約の類似となる BRST コホモロジーを導入することで、ハイパートーリック多様体上に超局所化されたカイラル微分作用素の層を構成し、新しいクラスの頂点代数を具体的な形で構成した。ここで構成された新しいクラスの頂点代数は特定のレベルのサブレギュラー A 型の W 代数や A 型アフィンリー代数に付随する単純アフィン頂点代数を含むが、これまで知られていなかった頂点代数も多く含む。構成した頂点代数が、ヴィラソロ代数を内部に含む頂点作用素代数であることを証明したほか、幾何学的・超局所解析的な構成からこれらの頂点代数に対して脇本実現の類似となる自由場表示が得られることを示した。

(2) A 型のサブレギュラー W 代数に対しては、任意のレベルの頂点代数が A 型のスロドウィー多様体の上に超局所化されたカイラル微分作用素の層によって実現されることを示した。

(3) (1), (2) で得られた A 型サブレギュラー W 代数の実現から、A 型サブレギュラー W 代数の構造を A 型スロドウィー多様体の幾何学的な構造を利用して研究することができる。そのような観点から、A 型サブレギュラー W 代数の頂点代数としての生成元を具体的な形で構成することができた。最終的には元良直輝との共同研究の結果、そのような生成元の構成は純代数的に証明できることがわかった。

(4) 有木小池代数や巡回  $q$ -シューア代数に付随する有理チェレドニック代数に対して、誘導・制限関手の間にマッキー型の公式が成立することを宮地兵衛・和田堅太郎との共同研究で証明した。このような公式が確立されることによって、有理チェレドニック代数の表現論に代数群の表現論で用いられる理論を応用することができるため、今後の表現論への応用が期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Toshiro Kuwabara	4. 巻 -
2. 論文標題 Vertex Algebras Associated with Hypertoric Varieties	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnaa031	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naoki Genra, Toshiro Kuwabara	4. 巻 110
2. 論文標題 Strong generators of the subregular W-algebra $W^{K-N}(sl_N, f_{\text{sub}})$ and combinatorial description at critical level	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 21-41
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11005-019-01211-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshiro Kuwabara, Hyohe Miyachi, Kentaro Wada	4. 巻 58
2. 論文標題 ON THE MACKEY FORMULAS FOR CYCLOTOMIC HECKE ALGEBRAS AND CATEGORIES $\mathcal{O}$ OF RATIONAL CHEREDNIK ALGEBRAS	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 103-134
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.18910/78993	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 4件／うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Toshiro Kuwabara
2. 発表標題 Deformed TCDO over Grassmannian and simple affine VOA
3. 学会等名 Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toshiro Kuwabara
2. 発表標題 quantization of toric hyperkahler varieties and its chiralization
3. 学会等名 Workshop: Vertex Operator Algebras and Related Topics in Kumamoto (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Toshiro Kuwabara
2. 発表標題 Vertex algebras associated with hypertoric varieties
3. 学会等名 RIMS Workshop 10th CFT Seminar:A Conference on Vertex Algebras and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Toshiro Kuwabara
2. 発表標題 Vertex algebras associated with hypertoric varieties
3. 学会等名 Vertex algebras, factorization algebras and applications (Kavli IPMU) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 桑原 敏郎
2. 発表標題 Vertex algebras associated with hypertoric varieties
3. 学会等名 Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2017
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------