

令和 3 年 5 月 18 日現在

機関番号：32641

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K14153

研究課題名(和文) 接束による等質多様体の特徴付け

研究課題名(英文) Characterization of homogeneous varieties by means of tangent bundles

研究代表者

渡辺 究 (Watanabe, Kiwamu)

中央大学・理工学部・准教授

研究者番号：20638176

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：接束の正值性の観点から射影多様体の構造を研究した。「ネフ接束を持つファノ多様体は等質多様体である」というCampana-Peternell予想に関連する論文3本を執筆し出版された。ファノ多様体より広いクラスの多様体についても研究を行い、接束の2次外積がネフである多様体の構造定理と正標数の代数閉体上定義された多様体に関するDemailly-Peternell-Schneider型の定理を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

4年間の研究期間のうちに、5本の論文を執筆し、うち4本が出版された。とりわけ、研究課題であるカンパーナ・ペターネル予想(以下CP予想)に関連し、 $F_4(4)$ 型の等質多様体の特徴付けを得た。また、余指数3のファノ多様体に対してCP予想を肯定的に解決した。CP予想の解決には届かなかったが、その一方で、接束の二階外積がネフである多様体の構造定理と正標数の体上定義されたネフ接束を持つ射影多様体の構造定理を得た。CP予想より広い枠組みで構造定理を得ることができたことで、今後の研究に広がりが見えた。

研究成果の概要(英文)：I studied projective varieties from the viewpoint of the positivity of the tangent bundle. I wrote three papers on the Campana-Peternell conjecture "Any Fano manifold with nef tangent bundle is homogeneous". I also studied more wide class of varieties. As a consequence, I obtained a structure theorem of varieties with nef second exterior power of the tangent bundle and a positive characteristic analogue of the Demailly-Peternell-Schneider theorem.

研究分野：代数幾何学

キーワード：接束 ネフ 等質多様体 有理曲線 ファノ多様体 有理連結多様体

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景 この報告書を通して、多様体とは代数閉体上定義された非特異射影多様体を指す。特に断りがない限り代数閉体は複素数体とするが、一部正標数の場合を扱う。

第1チャーン類 $c_1(X)$ が正の「ファノ多様体」という枠組みの中で、対称性の高い有理等質多様体がどのように現れるか接束 T_X の観点から研究を行うことが研究の始まりであった。この方向の研究の歴史的な出発点として、森重文による Hartshorne 予想の解決が挙げられる：「豊富な接束をもつ多様体は射影空間である」。この予想は複素幾何における Frankel 予想の一般化としても知られている：「正則双断面曲率が正の多様体は射影空間である」。その後、一般化 Frankel 予想が N. Mok により解決された。Mok による証明は森の証明のアイデアを多く取り入れており、その後 VMRT の理論として発展してきた。VMRT とはファノ多様体上の極小有理曲線の接方向により定まる図形である。ファノ多様体の様々な幾何学が VMRT から読み取れることが Hwang と Mok 等の研究によって知られている。その一例として、Mok と J. Hong-Hwang による有理等質多様体の特徴付けに関する結果を思い出そう。

定理 ピカール数 1 のファノ多様体 X に対し、 X 上の一般の点における VMRT が長い単純ルートに対応する有理等質多様体 G/P の VMRT と射影同値であれば、 X は G/P と同型である。

長いルートに対応しない（つまり短いルートに対応する）ピカール数 1 の有理等質多様体は symplectic Grassmannian と二つの F_4 型の多様体のみである。これらに対しても定理と同じことが成り立つことが Mok, Hong, Hwang により予想されていた：

HHM 予想 X をピカール数 1 のファノ多様体とする。一般の点における X の VMRT がピカール数 1 の有理等質多様体 S の VMRT と射影同値であれば X は S と同型である。

上記歴史的背景のもと、VMRT の観点から有理等質多様体の特徴付けを行った。とりわけ Hartshorne 予想や一般化 Frankel 予想のさらなる一般化に当たる次の CP 予想を解決することを最終的な目標とした：

CP 予想 ネフ接束をもつファノ多様体（以下、CP 多様体）は有理等質多様体である。

他方、ネフ接束をもつ多様体は Demailly-Peternell-Schneider により研究され、エタール被覆の差を除いて、トーラス上の滑らかなファイバー空間として記述可能で、そのファイバーとして CP 多様体が現れることが知られている。

2. 研究の目的 上記歴史的背景のもと、CP 予想とその周辺の話題に関して研究を行った。Demailly-Peternell-Schneider の結果により、CP 予想の解決は、ネフ接束をもつ多様体の構造定理を与えることに他ならず、リーマン面の一意化定理を高次元化する試みと捉えることができる。このような構造定理を得ることは代数幾何学や複素幾何学の研究において重要な問題である。研究の後半ではファノ多様体の仮定を外し、接束の正值性の観点からより広いクラスの多様体の研究を行った。

3. 研究の方法 2012 年度より、R. Munoz, G. Occhetta, L. E. Sola Conde と CP 予想に関する共同研究を開始し、その翌年より J. A. Wisniewski も加わり、CP 予想に関するプロジェクトチームを組み問題に取り組み続けてきた。共同研究を通し、次を示した。

定理 全ての端射線の収縮射が P^1 束であるファノ多様体 X は G/B と同型である。ただし、 G は半単純線形代数群、 B はそのボレル部分群とする。

定理の系として次を得る：

系 多様体 X に対し、上記定理の仮定を満たす多様体 Y と端斜面の収縮射 $f: Y \rightarrow X$ が存在するならば、 X は有理等質多様体である。

これを応用して $F_4(4)$ 型の等質多様体の特徴付けを得た。また、この結果は余指数 3 のファノ多様体に関する CP 予想の研究にも用いた。その他の研究では有理曲線の変形理論に至るところで用いた。

4. 研究成果 主に以下の五つの結果を得た：

- I. $F_4(4)$ 型の等質多様体の特徴付け。
- II. 対角線集合 Δ がサイクルとしてネフとなる多様体の構造定理。
- III. 余指数 3 のファノ多様体に関する CP 予想の肯定的解決。
- IV. 接束の 2 次外積がネフである多様体の構造定理。
- V. 正標数の代数閉体上定義された多様体に関する Demailly-Peternell-Schneider 型の定理。

I. $F_4(4)$ 型の等質多様体の特徴付け HHM 予想の弱型として、以下の定理を得た：

定理 X をピカール数 1 のファノ多様体とする。任意の点における X の VMRT が $F_4(4)$ 型の等質多様体の VMRT と射影同値であれば X は $F_4(4)$ 型の等質多様体と同型である。この結果はトレント大学の G. Occhetta 氏と L. E. Sola Conde 氏との共同研究である。

II. 対角線集合 Δ がサイクルとしてネフとなる多様体の構造定理 n 次元多様体 X に対し対角線集合 $\Delta = \{(x, x) \mid x \text{ は } X \text{ 上の点}\}$ を考える. Δ は $2n$ 次元多様体 $X \times X$ 上の n 次元のサイクルである. サイクルとして Δ がネフとなるとき, その多様体の性質について研究を行った. 一般に, 接束がネフであれば Δ もネフであることに注意する. そのため, この研究はネフ接束をもつ多様体の構造研究の一般化とみなすことができる. 研究の結果, ネフ対角線集合を持つ多様体のいくつかの性質が分かった. また, 超曲面の完全交叉多様体やデル・ペッツォ多様体の場合に, いつネフ対角線集合をもつか判定した.

III. 余指数 3 のファノ多様体に関する CP 予想の肯定的解決 ファノ多様体 X の反標準因子 $-K_X$ に対し $-K_X/m$ が $\text{Pic}(X)$ の元となるような最大の自然数 m をファノ指数といい, $i(X)$ とかく. $n = \dim X$ としたとき, $i(X) \leq n+1$ となることが知られている. また, $ci(X) := n+1-i(X)$ を X の余指数という. 余指数が 2 以下の多様体に対し, CP 予想が成り立つことは知られていた. そこで, 余指数が 3 のファノ多様体に対し, CP 予想の研究をし, 予想を肯定的に解決した. この研究は宇都宮大学の鈴木拓氏との共同研究である.

IV. 接束の 2 次外積がネフである多様体の構造定理 Demailly-Peternell-Schneider が得たネフ接束をもつ多様体の構造定理を接束の 2 次外積がネフである多様体へ拡張した. 接束の 2 次外積がネフである多様体が双有理写像をもつのは射影空間の一点ブローアップに限ることを示した. また, それ以外の場合は任意の収縮射が非特異射であることを示した. それを用いて, 接束の 2 次外積がネフであるのは接束がネフであるときかファノ多様体に限ることを示した. また, 2 次外積がネフである多様体の次元が 6 以下のときに分類を与えた.

V. 正標数の代数閉体上定義された多様体に関する Demailly-Peternell-Schneider 型の定理 正標数の場合にネフ接束を持った多様体の構造定理は知られていなかった. 正標数の体上定義された多様体 X がネフ接束をもつとする. このとき, 数値的に自明な接束をもつ多様体 M と非特異射 $X \rightarrow M$ が存在し, そのファイバーはファノ多様体であることを示した. この結果は Demailly-Peternell-Schneider の結果の正標数に関するアナロジーとみなすことができる. また, 正標数の場合には非自明である端射線の収縮射の存在とその非特異性をネフ接束を持つ多様体に対して示した. 本研究は金光秋博氏 (研究当時京都大学所属, 現在埼玉大学所属) との共同研究である.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件／うち国際共著 4件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Taku Suzuki and Kiwamu Watanabe	4. 巻 31
2. 論文標題 Varieties with nef diagonal	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129167X20500111	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —

1. 著者名 Occhetta, Gianluca; Sola Conde, Luis E.; Watanabe, Kiwamu	4. 巻 291
2. 論文標題 Characterizing the homogeneous variety $F_4(4)$	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 2334-2346
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1002/mana.201700261	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Gianluca Occhetta, Luis E. Sola Conde; Conde, Kiwamu Watanabe,	4. 巻 Volume 286, Issue 3-4
2. 論文標題 A characterization of symplectic Grassmannians	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 PP. 1421-1433
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-016-1807-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Gianluca Occhetta, Luis E. Sola Conde; Conde, Kiwamu Watanabe, Jarosław A. Wisniewski	4. 巻 XVII, issue 2
2. 論文標題 Fano manifolds whose elementary contractions are smooth P^1 -fibrations: a geometric characterization of flag varieties	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa	6. 最初と最後の頁 PP. 573-607
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2422/2036-2145.201508_007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Gianluca Occhetta, Luis E. Sola Conde; Conde, Kiwamu Watanabe,	4. 巻 Volume 292, Issue 1-2
2. 論文標題 Correction to: A characterization of symplectic Grassmannians	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 569-570
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-019-02230-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kiwamu Watanabe	4. 巻 210
2. 論文標題 Fano manifolds of coindex three admitting nef tangent bundle	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 165-178
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10711-020-00538-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —

1. 著者名 Kiwamu Watanabe	4. 巻 Volume 385
2. 論文標題 Positivity of the second exterior power of the tangent bundles	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 ?
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2021.107757	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 —

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 9件／うち国際学会 4件）

1. 発表者名 渡邊 究
2. 発表標題 Fano manifolds of coindex three admitting nef tangent bundle
3. 学会等名 第7回代数幾何学研究集会—宇部—（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 渡邊 究
2. 発表標題 Varieties with nef diagonal
3. 学会等名 日大特異点論月曜セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 渡邊 究
2. 発表標題 Varieties with nef diagonal
3. 学会等名 東大数理代数幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kiwamu Watanabe
2. 発表標題 Characterizing the homogeneous variety $F_4(4)$
3. 学会等名 Algebraic Geometry and Moduli Theory（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 渡邊 究
2. 発表標題 Characterizing the homogeneous variety $F_4(4)$
3. 学会等名 代数幾何学セミナー（大阪大学）（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 渡邊 究
2. 発表標題 Geometric characterizations of rational homogeneous manifolds
3. 学会等名 代数学シンポジウム（大阪大学）（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 渡邊 究
2. 発表標題 Fano manifolds with nef tangent bundle
3. 学会等名 代数幾何学城崎シンポジウム（城崎温泉）（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 渡邊 究
2. 発表標題 Varieties with nef diagonal
3. 学会等名 第16回アフィン代数幾何学研究集会（関西学院大学大阪梅田キャンパス）（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kiwamu Watanabe
2. 発表標題 Positivity of the exterior power of the tangent bundles
3. 学会等名 Zoom Algebraic Geometry Seminar（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<https://sites.google.com/site/kiwamuwatanabeshomepage/home>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------