

令和 3 年 5 月 8 日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K14158

研究課題名（和文）直交型モジュラー多様体の幾何

研究課題名（英文）Geometry of orthogonal modular varieties

研究代表者

馬 昭平（Ma, Shouhei）

東京工業大学・理学院・准教授

研究者番号：80633255

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）：直交型モジュラー多様体や点付きK3曲面のモジュライ空間の双有理型を研究した。特に21次元以上の直交型モジュラー多様体はほとんど一般型になることを証明した。副産物として鏡映的モジュラー形式に関するグリツェンコとニクリンの予想を証明した。点付きK3曲面のモジュライ空間については小平次元の変わり目を調べた。また、ボーチャーズ積に関連した研究（同変ガウス和、くりこみ制限公式、新しい積構造）も行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

直交型モジュラー多様体は代数幾何、数論、表現論が交わる豊かな研究対象である。本研究では直交型モジュラー多様体のいくつかの幾何学的性質を研究した。特に高次元でほとんど一般型になるという結果は、「大自然はやはり複雑で奥深い」ということをある意味定量的に示したものと言える。

研究成果の概要（英文）：I studied the birational type of orthogonal modular varieties and the moduli spaces of pointed K3 surfaces. In particular, I proved that most orthogonal modular varieties are of general type in dimension greater than 20. As a byproduct I proved a conjecture of Gritsenko and Nikulin on reflective modular forms. For the moduli spaces of pointed K3 surfaces, I studied the transition point of Kodaira dimension. I also studied some topics related to Borcherds products, such as equivariant Gauss sum, quasi-pullback formula and a new product structure.

研究分野：代数幾何

キーワード：直交型モジュラー多様体

1. 研究開始当初の背景

符号 $(2,n)$ の整数係数2次形式から直交型モジュラー多様体と呼ばれる n 次元の代数多様体が定まる。ボーチャーズ積などの直交型モジュラー形式の住処であり、代数幾何ではK3曲面のモジュライ空間としても登場する。本研究では直交型モジュラー多様体の幾何を研究した。

これまで、小平次元については比較的次元のモジュラー多様体に対してはいくつかの結果が知られていたが、高次元での研究は少なかった。本研究では高次元の直交型モジュラー多様体の小平次元を研究した。また、直交型モジュラー多様体がモジュライ空間になっている時、点付きK3曲面のモジュライ空間のような、自然な普遍族が乗っている。モジュライ空間自身の幾何や直交群の保形形式と深く関わっていることが期待される。それらの普遍族の双有理型も研究した。

こうした双有理型の研究に、直交型モジュラー形式の研究も自然に関連してくる。特に、くりこみ制限操作の研究や次元公式の研究を行なった。また、ボーチャーズリフトの原料の空間の構造も研究した。

また、代数サイクルと不分岐コホモロジーの関係も研究した。不分岐ブラウアー群（アルティン・マンフォード不変量）が源流である。

2. 研究の目的

直交型モジュラー多様体の双有理型を調べる。特に小平次元を計算する。また、K3曲面や正則シンプレクティック多様体のモジュライ空間上の普遍族の双有理型も調べる。これらに関連して、ボーチャーズ積のくりこみ制限や、ヴェイユ表現型モジュラー形式の空間も研究する。また、これらと並行して、代数サイクルと不分岐コホモロジーの関係の調べる。

3. 研究の方法

モジュラー多様体の小平次元の計算は、モジュラー形式と多重標準形式の対応に基づく。モジュラー形式の構成については、ヒルツェブルフ・マンフォード体積の計算とカスプ形式のリフティング構成が2本柱となる。前者は2次形式の局所密度の計算に帰着される。後者はリフトの原料のカスプ形式を構成するためにアイゼンシュタイン級数の組み合わせを使ったり、次元公式を使ったりする。また、前提としてトロイダルコンパクト化の特異点や境界因子の理解が欠かせない。

モジュラー多様体自身の標準形式の構成にはウェイトの小さなカスプ形式しか使えなかったが、普遍族に対してはウェイトの大きいカスプ形式も応用できる。特に、ボーチャーズのファイ12と呼ばれる26次元領域上の貴重なモジュラー形式のくりこみ制限が大事な役割を果たすことになる。

4. 研究成果

(1) モジュラー多様体の小平次元

21次元以上の直交型モジュラー多様体であって一般型でないものは本質的に有限個しかないと証明した。特に108次元以上では常に一般型になる。副産物として鏡映的モジュラー形式の有限性に関するグリツェンコ・ニクリンの予想を証明した。

(2) 普遍族の小平次元

アーベル多様体やK3曲面の普遍族上の多重標準形式とある種のモジュラー形式の対応を与え、普遍族の小平次元に応用した。特にK3曲面の場合には向井モデルによる幾何学的な考察とボーチャーズ積による標準形式の構成ではさみこむことで、小平次元の変わり目を計算した。同様の研究を正則シンプレクティック多様体に対しても行なった。

(3) 同変ガウス和

ヴェイユ表現型のモジュラー形式の空間のうち直交群による不変空間の次元を計算したところ、新しいタイプのガウス和（同変ガウス和）に遭遇した。いくつかの基本的な2次形式に対して計算し、それらの場合には数論的な公式が成り立っていることがわかった。

(4) くりこみ制限公式

ポーチャーズ積のくりこみ制限はまたポーチャーズ積になるが、その原料となるヴェイユ表現値のモジュラー形式の公式を与えた。ある種のテータ函数との縮約が、公式の本質的部分である。

(5) ポーチャーズ積の代数

ポーチャーズリフトの原料を与えるヴェイユ表現値の弱モジュラー形式たちの空間は無次元の線形空間になるが、この空間に積を定めることができ、それによって結合的代数の構造を持つことを証明した。この積が可換になるのはちょうど2次形式がユニモジュラーになる時である。さらにこの積は、くりこみ制限によって、2次形式の埋め込みに関して保たれる。すなわちくりこみ制限が環準同型を与える。

(6) カスプの有理同値

直交型モジュラー多様体を含むいくつかの古典的な系列のモジュラー多様体に対して、ベイリー・ボレルコンパクト化の2つの同次元のカスプが有理チャウ群において線形従属であることを証明した。これはマニン・ドリinfeldの定理の代数サイクルの観点からの高次元版を与える。

(7) 代数サイクルと不分岐コホモロジー

非特異射影多様体の不分岐コホモロジーやそのホモロジー的類似物と代数サイクルの関係を調べた。まず4次のホモロジー的不変量が1次元サイクルのグリフィス群や整数係数コホモロジーのconiveauフィルトレーションによって記述できることがわかった。そして、一般化として、不分岐 (コ) ホモロジーにあるフィルトレーションを定めて、その最初のフィルターが整数係数コホモロジーのconiveauフィルトレーションによって記述できることを証明した。この最初のフィルターがアルティン・マンフォード不変量やコリオットテレーヌ・ヴォアザン不変量の高次版を与える。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Shouhei Ma	4. 巻 95
2. 論文標題 Modular forms of weight 3m and elliptic modular surface	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A	6. 最初と最後の頁 31-36
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3792/pjaa.95.31	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shouhei Ma	4. 巻 51
2. 論文標題 Quasi-pullback of Borcherds products	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Bulletin of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1061-1078
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/blms.12287	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shouhei Ma	4. 巻 212
2. 論文標題 On the Kodaira dimension of orthogonal modular varieties	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Inventiones Mathematicae	6. 最初と最後の頁 859-911
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00222-017-0781-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shouhei Ma	4. 巻 30
2. 論文標題 Equivariant Gauss sum of finite quadratic forms	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Forum Mathematicum	6. 最初と最後の頁 1029-1047
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/forum-2017-0070	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shouhei Ma	4. 巻 139
2. 論文標題 Finiteness of 2-reflective lattices of signature (2,n)	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 American Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 513-524
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1353/ajm.2017.0013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shouhei Ma	4. 巻 22
2. 論文標題 Torsion 1-cycles and the coniveau spectral sequence	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Documenta Mathematica	6. 最初と最後の頁 1501-1517
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shouhei Ma	4. 巻 5
2. 論文標題 Rational equivalence of cusps	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annals of K-Theory	6. 最初と最後の頁 395-410
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/akt.2020.5.395	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shouhei Ma, Ken-Ichi Yoshikawa	4. 巻 156
2. 論文標題 K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space IV	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Composition Mathematica	6. 最初と最後の頁 1965-2019
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/S0010437X2000737X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 8件 / うち国際学会 7件）

1. 発表者名 Shouhei Ma
2. 発表標題 Rational equivalence of cusps
3. 学会等名 Japanese-European symposium on symplectic varieties and moduli spaces (ETH, Swiss) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shouhei Ma
2. 発表標題 Universal K3 surfaces and orthogonal modular forms
3. 学会等名 Discrete groups and moduli (名古屋大学) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shouhei Ma
2. 発表標題 Mukai models and Borcherds products
3. 学会等名 Workshop on Algebraic Geometry (KIAS, Korea) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shouhei Ma
2. 発表標題 Siegel modular forms and universal abelian variety
3. 学会等名 Automorphic forms and Algebraic geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shouhei Ma
2. 発表標題 Universal abelian variety and Siegel modular forms
3. 学会等名 Japanese-European symposium on symplectic varieties and moduli spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shouhei Ma
2. 発表標題 On the Kodaira dimension of orthogonal modular varieties
3. 学会等名 K3 surfaces and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 馬 昭平
2. 発表標題 向井モデルとボークャーズ積
3. 学会等名 城崎代数幾何シンポジウム (オンライン) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Shouhei Ma
2. 発表標題 Universal holomorphic symplectic varieties and Borchers products
3. 学会等名 Moduli spaces and Modular forms (MFO Oberwolfach, Germany, オンライン) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------