

令和 3 年 5 月 19 日現在

機関番号：34304

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K14159

研究課題名（和文）非可換特異点解消を用いた特異点の研究

研究課題名（英文）Studies on singularities using non-commutative resolutions

研究代表者

中嶋 祐介（NAKAJIMA, Yusuke）

京都産業大学・理学部・助教

研究者番号：20783096

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、非可換（クレパント）特異点解消と呼ばれる非可換代数に注目し、特異点の研究を行なった。当該研究期間においては、計6本の学術論文の出版、11件の国際研究集会での発表などの成果を上げた。主な成果として、トーリック特異点に関する以下の2件がある。

- (1) ダイマー模型から構成できる非可換クレパント特異点解消を用いて、3次元Gorensteinトーリック特異点の極大Cohen-Macaulay加群の安定圏と、その団傾対象を考察した。
- (2) いくつかの特別な高次元トーリック特異点のクラス（例えば日比環）に対して、非可換クレパント特異点解消を新たに構成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

研究対象である非可換クレパント特異点解消は、接続層の導来圏の研究を契機として導入された非可換代数である。接続層の導来圏のみならず、極大Cohen-Macaulay加群の表現論など、多くの分野と関連することがこれまでに知られている。この非可換クレパント特異点解消を介した分野のつながりは、新たな研究視点をもたらし、複数の分野の発展につながってきた。本研究では、これまで存在が知られてなかった非可換クレパント特異点解消を新たに構成したり、その背後にある組合せ論的な構造を解明したりしており、この成果は関連分野の研究に大きく寄与している。

研究成果の概要（英文）：In this research project, I studied some singularities by using non-commutative algebras called non-commutative (crepant) resolutions. During the period of this project, I wrote six published papers and gave eleven research talks in international conferences. As the main topics, there are two results relating to toric singularities as follows:

- (1) I observed the stable categories of three dimensional Gorenstein toric singularities and its cluster tilting objects using non-commutative crepant resolutions arising from dimer models.
- (2) I constructed new non-commutative crepant resolutions for some classes of higher dimensional toric singularities (e.g., the ones associated to Hibi rings).

研究分野：環論

キーワード：非可換特異点解消 非可換クレパント特異点解消 極大Cohen-Macaulay加群 ダイマー模型 トーリック環 日比環 正標数の可換環論 団理論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

可換環 R の「非可換クレパント特異点解消 (non-commutative crepant resolution = NCCR)」は、代数多様体 $\text{Spec}R$ のクレパント特異点解消の非可換類似を与える代数である。良い状況では、クレパント特異点解消の接続層の導来圏と、NCCR上の有限生成加群の導来圏が同値となり、この同値性により環の表現論の視点から特異点解消を考察することができる。また、NCCRに類似の概念である「非可換特異点解消」も重要な研究対象である。可換環 R の非可換特異点解消とは、 R 加群 M の自己準同型環 $\text{End}(M)$ で、その大域次元が有限のものである。 R のNCCRは、この非可換代数にさらなる条件を課したものである。NCCRを与える加群 M は、Cohen-Macaulay表現論、とりわけ傾理論や高次元Auslander-Reiten理論と深い関係があり、NCCRを架け橋として環の表現論の手法を特異点の研究に導入することができる。このように、NCCRは可換環論・特異点論・環の表現論などをつなぐ重要な対象である。しかし、NCCRを構成することは困難なことが多く、NCCRを持たない可換環の例も存在する。よって、与えられた可換環に対するNCCRの存在性の判定や、具体的な構成方法を与えることも重要な問題である。

2. 研究の目的

上記の背景をふまえ、本研究では以下の2点を解明することを目的とする。

- (a) NCCRの存在・構成法が分かっている可換環 R に対して、NCCRの性質と $\text{Spec}R$ のもつ特異点の性質との関係を明らかにすること。
- (b) NCCRの存在が分かっていない可換環に対して、その存在性を判定すること、存在する場合は、具体的な構成方法を確立すること。

これら(a), (b)について、特にトーリック環 (特異点) に焦点を当て考察を進めていく。以下に記すように3次元Gorensteinトーリック環のNCCRの存在・構成法はよく知られている。よって、このトーリック環に関しては(a)の問題を考える。一方、高次元トーリック環に関しては、多くの場合、NCCRが存在するか否かがわかっていないため、(b)の問題を考える。

3. 研究の方法

上記の研究目的における課題(a) (b)に関して、トーリック環の背後にある組合せ論的構造に注目することにより、研究を進める。具体的な方針は以下の通りである。

(a)に関しては、「ダイマー模型」から得られるNCCRに注目する。ダイマー模型とは、実2次元トーラス上に描かれた2部グラフであり、その双対グラフとして簞が得られる。このとき、簞から定義される関係式付き道代数が3次元Gorensteinトーリック環のNCCRとなることが知られている。さらには、簞の表現のモジュライ空間を考えることにより、クレパント特異点解消が得られることも知られている。これらの特異点解消の構造・性質は、ダイマー模型の組合せ論、特に完全マッチングを用いて記述することができる。したがって、この組合せ論的構造に注目することにより、3次元Gorensteinトーリック環や、その(非可換)クレパント特異点解消への理解を深めていく。

(b)に関しては、日比環と呼ばれる特別なトーリック環のクラスに注目する。多くの場合、日比環の次元は3より大きく、NCCRの存在は知られていない。一方、日比環は豊かな組合せ論的構造を持っており、その環論的性質を組合せ論の言葉で記述することができる。このことから、日比環に付随する組合せ論的構造を用いて、NCCRを構成できないかを考察する。

4. 研究成果

本研究課題に関する主な成果は以下の通りである。

- (1) ダイマー模型の完全マッチングを用いることで、3次元Gorensteinトーリック環のNCCRに対して、 Z 次数付けを与えることができる。この次数付きNCCRからは、「2無限表現型代数」

という、多元環の表現論・非可換代数幾何学において重要な代数が得られる。本研究では、この 2 無限表現型代数を用いることにより、3 次元 Gorenstein トーリック孤立特異点上の \mathbb{Z} 次数付き極大 Cohen-Macaulay 加群の安定圏は、傾対象を持つことを明らかにした。さらに、3 次元 Gorenstein トーリック孤立特異点上の極大 Cohen-Macaulay 加群の安定圏が、ある非可換代数に付随する団圏（クラスター圏）と同値となることも明らかにした。本結果はプレプリント (arXiv:1806.05331) として公開されている。

(2) 日比環の持つ、組合せ論的構造に注目することで、以下の場合には NCCR が存在すること、および NCCR の具体的な構成法を与えた。

- 日比環が Gorenstein かつ多項式環の Segre 積と同型であるとき、
- 日比環が Gorenstein かつ、その因子類群が \mathbb{Z} か \mathbb{Z}^2 であるとき。

前者は、東谷章弘氏との共同研究である。これらの成果をまとめた 2 本の論文が、それぞれ *Selecta Mathematica* と *Journal of Pure and Applied Algebra* から出版されている。

(3) 上記(2)の NCCR の構成においては、「conic」と呼ばれる加群が重要となっている。この conic 加群に関する考察の別の応用として、正標数の特異点の不変量を計算した（東谷章弘氏との共同研究）。具体的には、日比環の「(一般化された) F-signature」と呼ばれる不変量の値を決定した。不変量の計算においては、F-signature と対称群との関係も見出しており、正標数の特異点の不変量に関する新たな視点を与えている。本結果をまとめた論文は、*Illinois Journal of Mathematics* から出版予定となっている。

(4) 前述のダイマー模型に関しては、ミラー対称性の視点からも研究を行なった（東谷章弘氏との共同研究）。特に、「ダイマー模型の変形」という操作を新たに導入することにより、ファノ多様体のミラー対称性の文脈に現れる「組合せ的変異」と呼ばれる操作を、ダイマー模型の視点から説明した。本結果はプレプリント (arXiv:1903.01636) として公開されている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Akihiro Higashitani and Yusuke Nakajima	4. 巻 65
2. 論文標題 Generalized F-signatures of Hibi rings	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Illinois Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 97 ~ 120
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1215/00192082-8827655	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Akihiro Higashitani, Yusuke Nakajima	4. 巻 25
2. 論文標題 Conic divisorial ideals of Hibi rings and their applications to non-commutative crepant resolutions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Selecta Mathematica New Series	6. 最初と最後の頁 no. 78
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00029-019-0523-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yusuke Nakajima	4. 巻 2
2. 論文標題 Semi-steady non-commutative crepant resolutions via regular dimer models	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 173 ~ 195
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/alco.39	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Yusuke Nakajima	4. 巻 223
2. 論文標題 Non-commutative crepant resolutions of Hibi rings with small class group	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 3461 ~ 3484
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2018.11.012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yusuke Nakajima	4. 巻 -
2. 論文標題 Finite dimensional algebras arising from dimer models and their derived equivalences	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 第51回環論および表現論シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 104 ~ 109
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yusuke Nakajima	4. 巻 23
2. 論文標題 Mutations of Splitting Maximal Modifying Modules: The Case of Reflexive Polygons	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 470 ~ 550
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnx114	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Osamu Iyama and Yusuke Nakajima	4. 巻 12
2. 論文標題 On steady non-commutative crepant resolutions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Noncommutative Geometry	6. 最初と最後の頁 457 ~ 471
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/JNCG/283	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yusuke Nakajima	4. 巻 -
2. 論文標題 Conic divisorial ideals of Hibi rings and their applications	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 第62回代数学シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計24件(うち招待講演 15件/うち国際学会 11件)

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Representation theory of algebras arising from dimer models
3. 学会等名 OCAMI代数セミナー(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Combinatorial mutations of polygons via dimer models
3. 学会等名 McKay correspondence, mutation and related topics(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 On non-commutative crepant resolutions of toric singularities
3. 学会等名 阪大オンライン代数幾何学セミナー(招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 On Frobenius push-forward of Hibi rings
3. 学会等名 Commutative Algebra and Lattice Polytopes(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 On deformations of dimer models
3. 学会等名 Mutations: Mirror Symmetry, Deformations, and Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 On generalized cluster categories associated to dimer models (poster presentation)
3. 学会等名 Cluster Algebras 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Singularities having large F-signatures
3. 学会等名 特異点論月曜セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 On stable categories of maximal Cohen-Macaulay modules of 3-dimensional Gorenstein toric rings
3. 学会等名 AMS Spring Central and Western Sectional Meeting : Special Session on Commutative Algebra (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Conic modules of toric rings and some applications to non-commutative resolutions
3. 学会等名 東大可換環論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 On Frobenius push-forward of Hibi rings
3. 学会等名 Frobenius action in Commutative algebra: Recent Developments（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 McKay-type correspondence for three dimensional Gorenstein toric singularities
3. 学会等名 京都大学代数幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 McKay-type correspondence for three dimensional Gorenstein toric singularities
3. 学会等名 特異点論月曜セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Representation theory of three dimensional Gorenstein toric singularities
3. 学会等名 Workshop on McKay correspondence and noncommutative algebra (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Finite dimensional algebras arising from dimer models and their derived equivalences
3. 学会等名 第51回環論および表現論シンポジウム
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 On non-commutative crepant resolutions for some toric rings
3. 学会等名 String-Math 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Non-commutative crepant resolutions of some toric rings
3. 学会等名 Higher homological algebra and cluster tilting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Conic divisorial ideals of Hibi rings
3. 学会等名 特異点論月曜セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Non-commutative crepant resolutions for some Hibi rings
3. 学会等名 名古屋大学 環論表現論セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Non-commutative crepant resolutions for some Hibi rings (ポスター発表)
3. 学会等名 Matrix factorizations and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Conic divisorial ideals of Hibi rings and their applications
3. 学会等名 第62回代数数学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Non-commutative crepant resolutions for some Hibi rings
3. 学会等名 Noncommutative Algebraic Geometry and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Non-commutative crepant resolutions for some toric singularities
3. 学会等名 特異点論月曜セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 On the Frobenius push-forward of Hibi rings
3. 学会等名 第39回可換環論シンポジウム
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Several algebras arising from dimer models
3. 学会等名 第21回静岡代数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Yusuke Nakajima's Web Page
<https://sites.google.com/view/nakajima-math>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------