

令和 2 年 7 月 14 日現在

機関番号：13901

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K14160

研究課題名(和文) Mutation in derived categories and lattice theory of torsion classes and wide subcategories

研究課題名(英文) Mutation in derived categories and lattice theory of torsion classes and wide subcategories

研究代表者

DEMONET Laurent (Demonet, Laurent)

名古屋大学・多元数理科学研究科(国際)・G30特任准教授

研究者番号：70646124

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：gentle代数Aは表現論における古典的对象であり、tame表現型の典型例として広く研究されている。近年では団代数や位相的深谷圏にも応用されている。直既約A加群はstring(Aの籠上のwalkで関係式に反しないもの)で分類される。またAは分割された点付き曲面として実現され、stringはその上の曲線として実現される。特に2つのstringに対して交差の概念が定義できる。Aaron Chanとの共同研究で、A上の有限次元加群の圏のねじれ部分圏と、パラメータ付き無限stringの極大非交差集合の間の、自然な一対一対応を構成した。これは、ねじれ類の関手的有限性を仮定しない強力な結果である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

加群圏のねじれ部分圏は、導来圏の特別なt構造の加群圏への制限であり、古典的な対象であるとともに、傾理論、特に変異理論の発展により、近年盛んに調べられている。本研究では、与えられた代数の加群圏におけるねじれ部分圏の全体の成す完備束(complete lattice)を調べ、その束論的性質や代数の表現論的性質との関係を明らかにした(Iyama, Reiten, Readin, Thomasとの共同研究)。また、gentle代数と呼ばれる重要な代数に対して、ねじれ部分圏を組み合わせた論的なデータによって完全に分類することに成功した(Chanとの共同研究)。

研究成果の概要(英文)：The class of gentle algebras A is a classical object in representation theory and is widely studied as a typical example of algebras of tame representation type. Recently it has been applied to cluster algebras and topological Fukaya categories. It is known that A -modules are classified by strings (walks on the quiver of A which are compatible with relations). Also A is realized as a dissected marked surface, and a string is realized as a curve on it. In particular, the notion of the intersections of two strings can be defined. In a joint work with A. Chan, we constructed a canonical one-to-one correspondence between the torsion classes of the category of finite dimensional A -modules and the maximal parametrized non-crossing sets of infinite strings. This is a powerful result that does not require the functorial finiteness of torsion classes.

研究分野：代数の表現論

キーワード：torsion class lattice gentle algebra Representation theory wide subcategory Brauer graph algebra

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

1. 研究開始当初の背景

近年、加群圏のねじれ部分圏の研究が、Adachi-Iyama-Reiteによって導入された τ 傾加群の概念により、大きく進展した。例えば、ねじれ部分圏の包含関係で与えられる半順序は、変異操作と密接に関連し、またそれによって導来圏の t 構造に関する新しい洞察も得られた。

2. 研究の目的

本研究の主目的は、与えられた代数の、特に商代数をとる操作に着目して、ねじれ部分圏の成す完備束の持つ組み合わせ構造を理解することである。

また、gentle 代数をはじめとする特定のクラスの代数に対して、ねじれ部分圏の具体的な分類を行うことを予定している。

さらに関連して、実 Grothendieck 群の元から生じる広大部分圏や、ねじれ部分圏から与えられる扇の構造についても研究を行う。

3. 研究の方法

ねじれ部分圏の成す完備束に関しては、Osamu Iyama (Nagoya), Nathan Reading (North Carolina), Idun Reiten (NTNU), Hugh Thomas (Montreal) との国際共同研究として進めた。Gentle 代数のねじれ部分圏の分類に関しては、Aaron Chan (Nagoya) との共同研究として進めた。

国内の研究者とは、実際に研究室やセミナー室で議論を行った。国外の研究者とは、国際研究集会等で会う際に、議論を集中的に行なった。

4. 研究成果

(1) 有限次元代数 A の加群圏のねじれ部分圏の成す完備束 $\text{tors } A$ に関する論文を完成させ、arXiv:1711.01785 として公表し、国際学術誌に投稿した (Iyama, Reading, Reiten, Thomas との共同研究)。

この論文のほとんどの結果は、ねじれ部分圏の関手的有限性を仮定しておらず、また無限個のねじれ部分圏が存在する場合にも適用することができる。この意味で研究の当初よりもはるかに一般的で強力な結果が得られた。

特に、有限束に対する congruence uniform の概念を無限束にまで拡張したが、これは代数的観点からも束論的観点からも興味深いと思われる。特に完備束 $\text{tors } A$ は、束論で調べられている完備束と比較して、かなり特徴的な性質を備えていることが明らかとなった。

例えば、 $\text{tors } A$ は無限束となる場合でさえ、その Hasse 箴が非常に多くの情報を持つ (arrow-separated と呼ぶ性質を満たしている) ことが示された。

(2) gentle 代数の加群圏のねじれ類の分類に関する、Aaron Chan との共同研究に取り組み、多くの重要な成果を得た。

gentle 代数 A 上の直既約加群は string (A の箴上の walk で関係式に反しないもの) によって分類される。近年の研究により、gentle 代数 A は、自然な方法で分割された点付き曲面として実現されることや、さらに string は曲面上の曲線として実現されることが知られている。特に、2つの string に対して交差の概念が定義できる。

我々は、 A のねじれ類と、パラメータ付き無限 string の極大非交差集合の間の、自然な一対一対応を構成することに成功した。これは完備束の同型をも与えるものである。

この対応は、加群圏の特別な部分圏であるねじれ類を、組み合わせ論的対象によって完全に記述するものであり、ねじれ類の関手的有限性を仮定しない非常に強力な結果である。

この研究成果は、近日中に論文として公開する予定である。

(3) 関数的有限なねじれ部分圏からは、 g ベクトルをとることにより、実 Grothendieck 群内の扇を構成することができる。一方、実 Grothendieck 群の元からは自然な方法で広大部分圏を構成することができる。

さらにこれらは、団代数の研究に現れる scattering diagram と密接な関係がある。

以上の内容に関して Asai, Iyama らと議論を行い、いくつかの興味深い観察を得ることができた。これに関しては、今後も適宜、考察を行なっていく予定である。

2019年3月に開かれた日本数学会代数分科会において、(1)(2)の研究成果に関して1時間の特別講演を行った。
また、2019年6月に京都大学数理解析研究所で開催された団代数の国際研究集会でも、(1)(2)の研究成果に関して、1時間の招待講演を行った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

| | |
|---|--------------------|
| 1. 著者名 Laurent Demonet, Osamu Iyama, Gustavo Jasso | 4. 巻 1 |
| 2. 論文標題 -tilting finite algebras, bricks and g-vectors | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 Int. Math. Res. Not. | 6. 最初と最後の頁 1-41 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnx135 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

| | |
|---|-------------------|
| 1. 著者名 Laurent Demonet | 4. 巻 1 |
| 2. 論文標題 Introduction to algebras of partial triangulations | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 Proceedings of the 49th Symposium on Ring and Representation Theory | 6. 最初と最後の頁 1-5 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 7件 / うち国際学会 2件）

| |
|---|
| 1. 発表者名 Laurent Demonet |
| 2. 発表標題 Combinatorics of mutations and torsion classes |
| 3. 学会等名 Cluster Algebras 2019（招待講演）（国際学会） |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Laurent Demonet |
| 2. 発表標題 Combinatorics of mutations and torsion classes |
| 3. 学会等名 The Mathematical Society of Japan 2019 Annual Meeting（招待講演）（国際学会） |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Laurent Demonet |
| 2. 発表標題 Representations of (acyclic) quivers, Auslander-Reiten sequences, the Caldero-Chapoton formula (4 lecture) |
| 3. 学会等名 School on Cluster Algebras, ICTS, Bangalore, India (招待講演) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Laurent Demonet |
| 2. 発表標題 Treillis des classes de torsions |
| 3. 学会等名 Seminaire d'algebre, IHP, Paris (招待講演) |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Laurent Demonet |
| 2. 発表標題 Lattices of torsion classes |
| 3. 学会等名 International Workshop on Cluster Algebras and Related Topics, Chern Institut of Mathematics, Tianjin (招待講演) |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Laurent Demonet |
| 2. 発表標題 Lattices of torsion classes |
| 3. 学会等名 Symposium on Ring Theory and Representation Theory, Yamanashi |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Laurent Demonet |
| 2. 発表標題 Treillis des classes de torsions |
| 3. 学会等名 Seminaire d'algebre, Universite de Versailles (招待講演) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Laurent Demonet |
| 2. 発表標題 Treillis des classes de torsions |
| 3. 学会等名 Seminaire d'algebre, Universite de Calais (招待講演) |
| 4. 発表年 2018年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|--|---------------------------|-----------------------|----|
|--|---------------------------|-----------------------|----|