様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４年　６月１６日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2017～2021
課題番号：１７Ｋ１４１６１

研究課題名（和文）p進解析空間上のp進微分方程式の研究

研究課題名（英文）p-adic differential equations on p-adic analytic spaces

研究代表者
大久保　俊（Ohkubo，Shun）

名古屋大学・多元数理科学研究科・講師

研究者番号：２０７５５１６０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究における1つ目の成果は、p進微分方程式の解の対数的増大度の研究の基本定理であるChiarellotto-Tsuzuki予想を肯定的な解決である。本成果をまとめた論文が、2021年度にCompositio Mathematicaに掲載された。2つ目の成果は、Chiarellotto-Tsuzuki予想の、p-adic local monodromy theoremと両立する一般化の証明である。さらに、polyannuli上のp進微分方程式の研究を行い、3つ目の成果として、Kedlaya-Xiaoによる完備付値体上のp進微分方程式の分解定理の精密化を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
p進微分方程式は、2010年以降に、Kedlaya，Baldassarri，Poineau，Pulitaらによる解の収束半径の理論の完成によって大きく進歩した。p進微分方程式の局所理論における残る大きな課題は、解の対数的増大度の研究であった。本研究では、その基本予想であるChiarellotto-Tsuzuki予想を肯定的に解決し、p進微分方程式の理論の応用への道を開くことができた。本予想は、フロベニウス構造という代数的情報をp進微分方程式の解の対数的増大度という解析的情報を研究をつなぐ橋である。今後は、この橋を使って、代数体上の微分方程式の大域的性質の研究が進展することが期待される。

研究成果の概要（英文）：As a result of our research, we affirmatively prove Chiarellotto-Tsuzuki conjecture of logarithmic growth of solutions of p-adic differential equations. A paper containing this result appeared in Composition Mathematica in 2021. We also prove that a variant of Chiarellotto-Tsuzuki conjecture in a way compatible with p-adic local monodromy conjecture. We also extend a decomposition theorem of p-adic differential equations over complete valuation fields proved by Kedlaya-Xiao.

研究分野：代数的整数論

キーワード：p進微分方程式　対数的増大度　ピカールフックス方程式

１．研究開始当初の背景

2000 年代前半の Andre、Kedlaya、Mebkhout による p 進微分方程式に関する p 進局所モノドロミー予想の解決により、p 進ホッジ理論の p 進モノドロミー定理が解かれるなど、数論幾何において p 進微分方程式の道具としての重要性が認識されるようになった。p 進局所モノドロミー予想は p 進微分方程式の解の収束半径に関する予想であった。p 進微分方程式を数論幾何へさらに応用するためには、p 進微分方程式の解の収束半径だけの精密化である、解の対数的増大度を調べることが期待される。p 進微分方程式の解の対数的増大度の研究は 1970 年代から 1980 年代にかけて Dwork や Robba によって基礎が築かれたが、その後大きな進展がしばらくなかった。2010 年代になって、Andre によって Dwork の予想が解かれ、Tsuzuki、Chiarellotto によって Chiarellotto-Tsuzuki 予想(以下、C-T 予想)が提示されるなど、対数的増大度の研究の方向が示された。

一方、p 進局所モノドロミー予想は p 進円環上の p 進微分方程式に関する予想である。代数体上の数論幾何においあらわれる p 進微分方程式は、ピカールフックス加群の構成を通して、曲線上定義される。これまで p 進微分方程式は主に p 進円環上定義されたものを考えていたので、数論幾何への応用を見すえて一般の底空間に拡張することが課題であった。底空間を p 進円環から Berkovich 曲線に拡張する研究の試みは、2000 年代に Baldassarri、di Vizio らに始まり、2015 年から現在にかけ、Poineau、Pulita、Kedlaya、Baldassarri らにより完成されつつあった。

２．研究の目的

数論幾何への応用を見据えて、p 進円板上の p 進微分方程式の解の対数的増大度の理論を、Berkovich 曲線上の p 進微分方程式に拡張することが目標である。p 進微分方程式の解の収束半径に対しては、同様の問いが、Poineau、Pulita らにより解決されているが、Ducros の曲線の理論が重要であったので、本研究でも Ducros の理論を駆使する。また、本研究以前に Chiarellotto-Tsuzuki 予想の一部をすでに解決しており、このとき得た知見を元に継続して Chiarellotto-Tsuzuki 予想も考察する。

３．研究の方法

本研究は、代数学における不変量に関する一般的事実を見いだす研究である。おもに紙とペンを用いて、具体的な p 進微分方程式に対し不変量を計算し、その結果から一般の p 進微分方程式の不変量の計算方法を確立する、というのが基本的な研究方法である。関連する分野の研究集会に積極的に出席して、情報収集を行ったり、研究者と議論をし、着想の機会を増やす。

４．研究成果

C-T 予想は、フロベニウス構造付き p 進微分方程式の有界部分が純性条件をみたすとき、フロベニウスニュートン多角形と対数的増大ニュートン多角形が一致することを主張する予想である。C-T 予想は、階数が 2 の場合と、よい代数構造を持つ場合に Chiarellotti-Tsuzuki によって証明されていた。一般の場合には、問題が 2 つあった。1 つ目は、有界部分が純性条件をどのように使うか、ということである。純性条件なしでは C-T 予想には反例があるので、微妙な条件である。2 つ目は、Chiarellotto-Tsuzuki の手法では、p 進微分方程式によい代数構造を仮定しているが、一般には p 進微分方程式自身には代数構造が期待できない点であった。

本研究の一番の成果は、C-T 予想の肯定的解決である。C-T 予想において、あたえられた p 進微分方程式を原点のまわりで局所化することによって、DVR 上で定義された p 進微分方程式とみなす。この p 進微分方程式に対して、特殊点での解空間、生成点での解空間、がそれぞれ定義されるが、C-T 予想は特殊点での解空間に関する予想である。生成点での解空間は、de Jong によって 1990 年代後半に調べられており、p 可除群の生成的ファイバーに応用されていた。de Jong の手法を modify することで上記の 2 つの問題を解決した。より正確に述べると、1 つ目の問題は、有界部分の純性条件を、p 進微分方程式の最大フロベニウス傾きの非自明商による不変性に同値であることを示すことで解決した。この条件に読み替えることで、解の核でわって、C-T 予想は単射な解の場合に帰着される。解の単射性および対数的増大度は、適切な底変換で不偏である。2 つ目の問題は、逆傾きフィルトレーションもつように底変換することで、逆傾きフィルトレーションを使うことで解決される。逆傾きフィルトレーションによって、C-T 予想を拡大に関する基本的な命題に帰着することができた。

C-T 予想を解決したので、その帰結を研究した。結果として、Dwork の予想や Drinfeld-Kedlaya の結果の類似も証明した。さらに、特異点を許容する場合に拡張し、p 進局所モノドロミー定理と両立することも証明した。さらに、Daxing Xu 氏と議論し、正則特異点を持つ場合には、最大対数的増大傾きに強い条件を付けると、ニュートン多角形が決定されることを証明した。

以上の研究により、p 進微分方程式の解の対数的増大度の局所的研究はひとつの区切りをむかえたと言ってよい。C-T 予想は、フロベニウス構造という代数的情報を p 進微分方程式の解の対数的増大度という解析的情報を研究をつなぐ橋である。今後は、この橋を使って、代数体上の微分方程式の大域的性質の研究が進展することが期待される。

対数的増大度の研究以外の成果をまとめる。Dwork transfer 定理は、非特異な p 進微分方程式の収束ニュートン多角形に関する性質である。これを、正則特異な p 進微分方程式に拡張した。これと p 進微分方程式の族に関する収束ニュートン多角形の性質を応用して、Berkovich 射影直線上の超幾何微分方程式のパラメータが適当な場合に収束ニュートン多角形の自明性を証明した。これは、Dwork-Gerotto-Sullivan の結果の一般化になっている。

また、高次元円上の p 進微分方程式の研究を行った。n 個の導分が可換に作用する完備付値体上を考え、n=1 の場合の分解定理を拡張の可能性を考察し、Kedlaya-Xiao による分解定理の精密化を証明した。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Ohkubo Shun	４．巻 157
２．論文標題 Logarithmic growth filtrations for -modules over the bounded Robba ring	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Compositio Mathematica	６．最初と最後の頁 1265～1301
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/S0010437X21007107	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Ohkubo Shun	４．巻 26
２．論文標題 A note on logarithmic growth of solutions of p-adic differential equations without solvability	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Mathematical Research Letters	６．最初と最後の頁 1527～1557
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4310/MRL.2019.v26.n5.a13	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計5件（うち招待講演　5件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 大久保俊
２．発表標題 A note on the convergence Newton polygons of p-adic differential equations in the regular singular case
３．学会等名 Arithmetic geometry research report meeting 2021（招待講演）
４．発表年 2021年

１．発表者名 Shun Ohkubo
２．発表標題 Logarithmic growth f.iltrations for (φ, ∇)-modules over the bounded Robba ring
３．学会等名 RIMS Workshop Algebraic Number Theory and Related Topics（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Shun Ohkubo
２．発表標題 Logarithmic growth filtrations for (φ,∇)-modules over the bounded Robba ring
３．学会等名 p-adic cohomology and arithmetic geometry 2018（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Shun Ohkubo
２．発表標題 On the logarithmic growth of solutions of p-adic differential equations
３．学会等名 UK-Japan Winter School 2018 on Number Theory（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Shun Ohkubo
２．発表標題 On the logarithmic growth of solutions of p-adic differential equations
３．学会等名 p-adic cohomology and arithmetic geometry（招待講演）
４．発表年 2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関