様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　 ６ 月 １４ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2017～2022
課題番号：１７Ｋ１４１６３

研究課題名（和文）同変K群の標準基底とその応用

研究課題名（英文）Canonical bases in equivariant K-theory and their applications

研究代表者
疋田　辰之（Hikita, Tatsuyuki）

京都大学・数理解析研究所・助教

研究者番号：７０７９３２３０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：錐的シンプレクティック特異点解消と呼ばれる代数多様体の同変K群に標準基底の概念を定義し、正標数での半単純Lie代数の表現論に関するLuszitg予想の類似を定式化した。そしてトーリック超ケーラー多様体の場合に標準基底を全て明示的に決定することで、Bridgelandの意味での安定性条件の実類似の存在に関するBezrukavnikov-Okounkovの予想を証明し、また双対標準基底の中心電荷がGKZ超幾何関数のEuler型の積分で表示できることを発見した。さらにこの場合に標準基底の楕円化を導入し、それがシンプレクティック双対性の元でK群レベルでは見えない顕著な双対性を満たすことを発見した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
錐的シンプレクティック特異点解消の代数幾何や表現論に関して既存の予想の類似物を与えるだけでなく、様々な新しく興味深い現象を発見することができた。現在の技術では厳密に扱うことはまだ難しいが、ここで得られた結果は例えばシンプレクティック特異点解消の同変連接層の導来圏という代数幾何的な対象と、そのシンプレクティック双対のループ空間上の超局所偏屈層というシンプレクティック幾何的な対象が結びつくだろうというミラー対称性のような現象や、楕円標準基底の双対性と頂点作用素超代数の双対性に関係があるだろうといった様々な分野を結びつける現象を示唆している点が特に重要であると思われる。

研究成果の概要（英文）：We defined a notion of canonical bases for equivariant K-theory of conical symplectic resolutions and formulated an analogue of Lusztig's conjecture for modular representation theory of semisimple Lie algebras. We explicitly calculated K-theoretic canonical bases for toric hyper-Kahler manifolds and proved a conjecture of Bezrukavnikov-Okounkov on the existence of real variation of stability conditions in this case. We also found that the equivariant lift of the central charge of the dual canonical bases are given by Euler type integral for GKZ hypergeometric functions over explicit cycles and proved that there exists a Koszul type t-structure on the derived category of equivariant coherent sheaves such that its heart has a graded highest weight category structure. We introduced elliptic analogue of caonical bases for toric hyper-Kahler manifolds and found a new duality of elliptic canonical bases under symplectic duality which cannot be seen at the K-theory level.

研究分野：幾何学的表現論

キーワード：幾何学的表現論　シンプレクティック特異点解消　標準基底　楕円コホモロジー　楕円量子群

１．研究開始当初の背景

Bezrukavnikov らにより正標数での半単純 Lie 代数の表現論、Springer 特異点解消上の同変連接層の導来圏、及びアフィン旗多様体上のある種の偏屈層の圏が結び付けられ、その応用として正標数での半単純 Lie 代数の表現論に関する Lusztig の予想が解決された。一方で Springer 特異点解消は錐的シンプレクティック特異点解消の特別な場合であり、その量子化の表現論は半単純 Lie 代数の表現論の一般化として盛んに研究され始めていた。特に Lie 代数の Langlands 双対の一般化として、Braden-Licata-Proudfoot-Webster によりシンプレクティック双対性と呼ばれる双対性が錐的シンプレクティック特異点解消の設定で観察され、様々な興味深い現象が見つかりつつあった。しかしながら Lusztig 予想の定式化に必要なもののうち、同変 K 群の標準基底の概念は一般の場合には定式化されておらず、既に定式化されている Springer 特異点解消や Slodowy 多様体、ADE 型の箙多様体の場合にも、その定義は各々の設定に依存した技術的なものとなっており直ちに一般化できる形をしていなかった。

２．研究の目的

最初の研究の目的は標準基底の概念を一般の錐的シンプレクティック特異点解消に対して定義し Lusztig 予想の類似を定式化すること、及びそのシンプレクティック双対性との関係を調べることであった。研究の過程でシンプレクティック双対性との関係を定式化するには標準基底の概念を楕円化することが本質的に必要になることが明らかになったため、楕円標準基底の概念を定式化し調べることが主な研究の目的となった。

３．研究の方法

最初の重要な観察は Springer 特異点解消の場合に標準基底の定義に現れるバー対合が Maulik-Okounkov によって導入されたコホモロジーの安定基底の概念の K 理論類似に対して非常によく振る舞うというものであった。この性質を逆にバー対合の定義とすることで一般の錐的シンプレクティック特異点解消に対してバー対合を定義し、安定基底から出発して Kazhdan-Lusztig 型のアルゴリズムを用いることにより標準基底をコンピュータを用いて計算できるようにした。そしてトーリック超ケーラー多様体などの具体例の場合に標準基底を実際に計算することで新しい現象を発見し、その詳しい性質についての一般的な予想を定式化することを目指した。また K 理論的なバー対合のこの定義は Aganagic-Okounkov によって導入された楕円安定基底の概念を用いることで自然に楕円化することもできる。楕円の場合に Kazhdan-Lusztig 型のアルゴリズムは意味をなさないが、楕円バー対合で不変かつパラメータの適切な極限を取ることで K 理論的な標準基底を再現するものを探すこと楕円標準基底の具体例を見つけ、その性質を抽出することで標準基底の楕円化を定式化することを目指した。

４．研究成果

（１）K 理論的標準基底と Lusztig 型の予想

K 理論的安定基底は chamber と呼ばれる同変構造から来るデータと、slope と呼ばれる正標数での量子化のパラメータに相当するデータに主に依存して定まる基底となっており、K 理論的バー対合を安定基底の chamber をひっくり返すものとして定義した。この定義は技術的には正規化を正しく取らないと対合にならないという問題があったが、様々な数値実験によりシンプレクティック双対から定まるデータを用いることでそれを正しく指定できることを観察し、それが実際に対合になることを一般に予想した。この予想を認めるとシンプレクティック双対を持つ錐的シンプレクティック特異点解消に対して K 理論的な標準基底の概念を slope に依存する形で定式化することが出来る。また Lusztig によって定義されていた Springer 特異点解消の標準基底は特別な slope に対する K 理論的標準基底となっており、我々の定義ではこの場合でも新しい標準基底の系列を与えている。これは元々の Lusztig による標準基底が特別な量子化のパラメータに対してのみ表現論的に自然な解釈を持っていたという問題を解消し、一般の generic な量子化のパラメータに対する表現論を標準基底が統制していると考えられる。Bezrukavnikov-Mirkovic による Lusztig 予想の証明によれば、Lusztig の K 理論的標準基底は傾斜ベクトル束の直既約成分のクラスという代数幾何的解釈を持つことが知られている。一方で Kaledin によって錐的シンプレクティック特異点解消には正標数での量子化を用いることで傾斜ベクトル束が構成されている。この傾斜ベクトル束の直既約成分を計算することは非常に難しい問題であるが、錐的シンプレクティック特異点解消に対する Lusztig 予想の類似は、この直既約成分の K 理論でのクラスが量子化のパラメータに対応する slope に対する K 理論的標準基底として Kazhdan-Lusztig 型のアルゴリズムを用いて原理的に計算できるという形で定式

化できた。この直既約成分は正標数での錐的シンプレクティック特異点解消の量子化の表現論を統制しているため、この予想を用いることで K 理論的標準基底が正標数での量子化の表現論を記述していることが期待される。また錐的シンプレクティック特異点解消に関する重要な問題として傾斜ベクトル束の同変構造をうまく選ぶことによってその自己準同型環が非負次数付けを持つだろうという Kaledin の予想がある。Springer 特異点解消の場合は Bezrukavnikov-Mirkovic によって同変連接層の導来圏と Langlands 双対な Lie 群に付随するアフィン旗多様体上の偏屈層の圏を比較し、偏屈層に対する Deligne の weight の理論を用いることで同変構造を調節し、Kaledin の予想及び Lusztig の予想を証明していた。一般には同変構造をどう選ぶべきがが非常に難しい問題になっているが、K 理論的な標準基底の立場からは次数の非負性は定義あるいは構成から直ちに従うものであり、代わりにそれが傾斜ベクトル束から来ているかどうかが非常に難しい問題となっている。上に述べたバー対合の正規化を正しく取る上でシンプレクティック双対のデータを用いる必要があるという現象は、Springer 特異点解消の場合に Langlands 双対のアフィン旗多様体を用いて次数を選ぶ必要があったことに対応していると考えられる。

（２）標準基底の壁越えと安定性条件

K 理論的標準基底を再定式化して slope に応じた標準基底を考えることができるようになったことで、slope を動かしたときに標準基底がどのように変化するか、という問題を考えることができるようになった。様々な数値実験によりこの問題に対しても壁を越える前の標準基底から出発して適切な順序に関して Kazhdan-Lusztig 型のアルゴリズムを走らせることで壁を越えた後の標準基底が得られることを発見し、一般に予想として定式化した。これは正標数の量子化の文脈から Bezrukavnikov-Okounkov によって予想された、錐的シンプレクティック特異点解消の連接層の導来圏に Anno-Bezrukavnikov-Mirkovic によって定義された Bridgeland による安定性条件の実類似の構造が入るという予想にある壁越えの構造に同変構造を入れたものと解釈することができる。Kazhdan-Lusztig 型のアルゴリズムにおいて同変パラメータを入れることが本質的に必要だったように、壁越えに同変構造が入ることでそれを計算するアルゴリズムも与えているという点が非常に重要であると考えられる。Bridgeland の意味での安定性条件は t-structure の族と中心電荷という K 群上の関数のデータからなる構造であるが、Lusztig 型の予想を認めると generic な slope に対して傾斜ベクトル束から定まる t-structure が入ることがわかる。中心電荷は正標数の表現論の文脈からは対応する表現の次元(標数に依存する)の標数を無限大に飛ばしたときの漸近挙動を表していると考えられるが、代数幾何的には標準基底の適切な一次結合と slope に対応する分数直線束をテンソルして Euler 標数を取るという関数で書けることを予想した。元々の予想では Slodowy 多様体の場合の計算から標準基底の一次結合の部分を考えない形で中心電荷を与えていたが、この研究によって一般にはそれは正しくなく、標準基底の一次結合が構造層になるのは Slodowy 多様体の場合の特殊事情だったことが明らかになった。例えばアフィン平面上の点の Hilbert スキームの場合にはこの一次結合は Haiman によって導入され Macdonald 多項式などの研究で非常に重要な Procesi 束と呼ばれるベクトル束のクラスになることも観察されている。またトーリック超ケーラー多様体の場合には全ての slope に対する K 理論的標準基底やその壁越えは明示的に記述することができ、その応用としてこの場合の Lusztig 型の予想及び上の意味での Bezrukavnikov-Okounkov の予想を解決した。その証明の過程では中心電荷の同変類似を導入し、双対標準基底の同変中心電荷がトーリック超ケーラー多様体を定める組み合わせ論的なデータから定まる Gelfand-Kapranov-Zelevinsky の意味での超幾何微分方程式の Euler 型の積分解の形をしていることを観察した。ここで積分するサイクルは標準基底をある周期的な超平面配置の補集合の連結成分を用いてパラメトライズしたときの対応するポリトープで与えられる。この場合標準基底の中心電荷は Mellin-Barnes 型の積分解と対応し、固定点基底の中心電荷が級数解に対応することはトーリック多様体のミラー対称性の文脈から知られているが、これらの解の間の接続問題が K 理論的(双対)標準基底や固定点基底の間の基底変換の問題と解釈できることを意味しており、より一般の設定で同様のことができれば非常に興味深い現象であると考えられる。

（３）Koszul 双対の最高ウェイト圏構造

Lusztig 型の予想(特に Kaledin の予想)を認めると対応する傾斜ベクトル束の自己準同型環は Koszul になることが知られている。よって各 slope に対して同変連接層の導来圏には Koszul 双対の標準的な t-structure から来る、安定性条件の文脈で考えたものとは異なる t-structure が入る。Kazhdan-Lusztig 型のアルゴリズムを圏論的に解釈する概念として Cline-Parshall-Scott によって導入された最高ウェイト圏の概念があり、この t-structure の heart には圏論的安定基底を(余)標準対象とする次数付き最高ウェイト圏の構造が入ることを予想した。最高ウェイト圏は良い stratification を持つ空間上の偏屈層の圏として幾何的には現れることが知られているが、この予想はここで現れる最高ウェイト圏がシンプレクティック双対のある種のループ空間上の超局所偏屈層の圏として実現される可能性を示唆していると考えられ、Springer 特異点解消の場合にアフィン旗多様体上の偏屈層との対応があったことのある種の一般化になっているだろうと期待している。この予想もまたトーリック超ケーラー多様体の場合に証明を与えている。

（４）標準基底の楕円化
Aganagic-Okounkov によって定義された楕円安定基底を K 理論的安定基底の代わりに用いることでバー対合の楕円類似を同様に定義することができる。ここで楕円安定基底はケーラーパラメータと呼ばれる、slope と関係する別のパラメータに依存しており、これはシンプレクティック双対の同変パラメータと対応していることが知られている。バー対合を楕円化することによってその正規化にはシンプレクティック双対の幾何的なデータがより明らかな形で出てきており、楕円バー対合の方がより自然な概念であるといえる。トーリック超ケーラー多様体の場合にはさらに楕円バー対合で不変かつ適切な極限を取ることで全ての slope に対する K 理論的標準基底を与えるものを発見した。これがこの場合の楕円標準基底と考えられる。そして楕円安定基底を楕円標準基底で展開したとき、その係数にはシンプレクティック双対の楕円標準基底が出てくるという顕著な双対性がなりたっていることを証明した。これがシンプレクティック双対の元で標準基底がどう関係するかという問題に対する一つの答えであると考えられる。さらに楕円標準基底の公式はそれが格子頂点作用素超代数の指標と同じ形をしており、そのシンプレクティック双対性も格子頂点作用素超代数のある種の双対性と解釈できることが観察できる。これは楕円標準基底と頂点作用素超代数の表現論の間に密接な関係があることを示唆しており、非常に興味深い現象であると考えられる。しかし一般には楕円標準基底を一意的に特徴付ける条件はまだ見つかっておらず、今後の重要な課題として残っている。ただしトーリックでない例として、グラスマン多様体 Gr(2,4)の余接空間とそのシンプレクティック双対という例に対しても、同じ双対性を満たし楕円バー対合で不変かつ K 理論的標準基底を極限として全て含むものを構成することができることもわかった。また楕円バー対合が実際に対合になるかという問題は箙多様体のように GIT 商としてシンプレクティック特異点解消が構成されている場合には Okounkov によって導入された vertex functione と呼ばれるものに関するシンプレクティック双対性の予想から従うことがわかった。

（５）楕円量子群の幾何的構成
箙多様体の場合には Okounkov によって導入された nonabelian elliptic stable envelope を用いることで、対合であることが簡単にわかる別の楕円バー対合の定義を与えることができた。これが元の(アーベルな)安定基底を用いて定義されたバー対合と一致することを示すために、abelian elliptic stable envelope と nonabelian elliptic stable envelope がある意味で可換であることを示した。ここで stack としての商に対する abelian elliptic stable envelope の概念が必要になるが、これはシャッフル積として量子群などの文脈で呼ばれているもので明示的に与えられることがわかった。ADE 型の箙多様体に対する K 理論的標準基底は量子アフィン代数の表現論による特徴付けを持つことが知られているため、その楕円類似を調べるための準備として上のシャッフル積を用いて(ケーラーパラメータ付き、レベル 0 の)楕円量子群を幾何的に構成し、シャッフル加群と呼ばれるものの楕円類似も構成した。実際にこれが箙多様体の楕円コホモロジーへの作用を与えるか、またそれを用いて楕円標準基底を特徴付けることができるか、といった問題は今後の重要な課題である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計11件（うち招待講演　6件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 疋田辰之
２．発表標題 Non-toric examples of elliptic canonical bases
３．学会等名 Algebraic Lie Theory and Representation Theory
４．発表年 2021年

１．発表者名 Tatsuyuki Hikita
２．発表標題 Non-toric examples of elliptic canonical bases
３．学会等名 MS Seminar, Kavli IPMU（招待講演）
４．発表年 2021年

１．発表者名 疋田辰之
２．発表標題 K理論的標準基底とその楕円化
３．学会等名 日本数学会2022年度年会（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 疋田辰之
２．発表標題 Highest weight categories arising from equivariant coherent sheaves on toric hyper-Kahler manifolds
３．学会等名 阪大オンライン代数幾何学セミナー
４．発表年 2020年

１．発表者名
疋田辰之

２．発表標題
Elliptic canonical bases for toric hyper-Kahler manifolds

３．学会等名
東大京大代数幾何セミナー

４．発表年
2020年

１．発表者名
Tatsuyuki Hikita

２．発表標題
Elliptic canonical bases for hypertoric varieties

３．学会等名
Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2019

４．発表年
2019年

１．発表者名
Tatsuyuki Hikita

２．発表標題
Elliptic and K-theoretic canonical bases for hypertoric varieties

３．学会等名
Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
Tatsuyuki Hikita

２．発表標題
Elliptic canonical bases for toric hyper-Kahler manifolds

３．学会等名
Geometric Representation Theory and Quantum Field Theories（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名 　辷田辰之
２．発表標題 　標準基底と連接層
３．学会等名 　第2回数理新人セミナー（招待講演）
４．発表年 　2019年

１．発表者名 　辷田辰之
２．発表標題 　Canonical bases and hypergeometric functions
３．学会等名 　第4回Langlands and Harmonic Analysis
４．発表年 　2019年

１．発表者名 　辷田辰之
２．発表標題 　Canonical bases in equivariant K-theory of conical symplectic resolutions
３．学会等名 　Algebraic Lie Theory and Representation Theory (ALTReT) 2017（招待講演）
４．発表年 　2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関