

令和 2 年 7 月 10 日現在

機関番号：10106

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K14165

研究課題名(和文) Koszul代数の多角的研究

研究課題名(英文) Diversified study of Koszul algebra

研究代表者

松田 一徳 (Matsuda, Kazunori)

北見工業大学・工学部・准教授

研究者番号：20633241

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：Koszul代数の概念は、標準的度数付き二次代数に対して定義されるものである。本研究課題の目的は、(1)Koszul代数と関連が深い環論的不変量の研究、(2)Koszul性と他の環論的性質との関係の研究、(3)Koszul代数の例の構成、の3つの視点からKoszul代数を多角的に研究することであった。主な研究成果は以下の通りである。

1. 任意の正整数  $r, s$  に対しCastelnuovo-Mumford正則度が  $r$  かつ  $h$  多項式の次数が  $s$  となるKoszul代数が存在することを示した。
2. 剰余環がKoszul代数となることが知られているエッジイデアルに関して、いくつかの研究成果を挙げた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

研究実施計画において取り組む課題に挙げていた、埋入次元が6以下またはCastelnuovo-Mumford正則度が3のKoszulでないGorenstein二次代数の構成については、Mastroeni-Schenck-Stillmanによる2本のプレプリント(arXiv:1903.08265、arXiv:1903.08273)に先を越される結果となった。しかしながら、研究代表者による例(埋入次元が7でCastelnuovo-Mumford正則度が4のもの)がこの研究のきっかけとなった点では、意義があったと思われる。

また、エッジイデアルの研究の発展に貢献できたことも評価できる。

研究成果の概要(英文)：The notion of Koszul algebra is defined for standard graded quadratic algebras. The purpose of this research is to study Koszul algebra from the point of view of (1) research on ring-theoretic invariants which are closely related to Koszul algebra, (2) research on the relationship between Koszulness and other ring-theoretic properties, (3) construction of examples of Koszul algebras. Our results are as follows:

1. For any positive integers  $r$  and  $s$ , we prove that there exists a Koszul algebra such that its Castelnuovo-Mumford regularity is  $r$  and its degree of  $h$ -polynomial is  $s$ .
2. We have several results on the edge ideal, it is known that its quotient ring is Koszul.

研究分野：可換環論

キーワード：Koszul代数 Castelnuovo-Mumford正則度  $h$ 多項式 極値的ベッチ数 エッジイデアル マッチング数 誘導マッチング数 Cameron-Walkerグラフ

## 1. 研究開始当初の背景

**Koszul 代数**の概念は、標準的度数付き代数に対して定義されるもので、Priddy [Trans. Amer. Math. Soc., 1970] により導入された。Koszul 代数は二次代数 (すなわち、定義イデアルが二次生成) であり、また二次代数は完全交叉の場合 (Tate [Illinois J. Math., 1957]) および定義イデアルが2次のグレブナー基底を持つ場合 (Fröberg [Math. Scand., 1975]) に Koszul であることが知られている。Koszul 代数に関する国内・国外の研究内容は、(a) **Koszul 性**と他の環論的性質との関係、(b) **強 Koszul 性等の Koszul 性から派生した概念の研究**、(c) **Koszul 代数の例の構成および分類**、(d) **Koszul 性を特徴付ける不変量の研究**、に大別され、非常に多角的に研究されている。研究開始当初、研究代表者は (a), (b), (c) に関する研究成果を挙げていた。

(a) に関する研究成果: 「Gorenstein 二次代数は Koszul であるか?」という問題が Conca-Rossi-Valla [Compositio Math., 2001] により提起され、いくつか肯定的な結果が得られていたが、研究代表者によって Koszul でない Gorenstein 二次代数が発見された (Matsuda [Math. Scand., 2018])。

(b) に関する研究成果: いくつかのトーリック環に対し、強 Koszul となるものの分類を行なった: グラフに付随する安定凸多面体のトーリック環 (Matsuda [J. Algebra Appl., 2014])、エッジ環 (Hibi-Matsuda-Ohsugi [Acta. Math. Vietnam., 2016])。さらに、強 Koszul 無平方トーリック環は圧搾性を満たすこと、特に正規 Cohen-Macaulay 二次代数であることを示した (Matsuda-Ohsugi [Math. Scand., 2016])。

(c) に関する研究成果: 半順序集合を用いてトーリック環を構成し、そのトーリックイデアルが2次のグレブナー基底を持つことを示すことで、Koszul 代数の新しい例を構成した (Hibi-Matsuda-Ohsugi-Shibata [J. Algebra, 2015], Hibi-Matsuda [European J. Combin., 2016], Hibi-Matsuda-Tsuchiya [Math. Scand., 2017])。

## 2. 研究の目的

1. **研究開始当初の背景**で述べた、Koszul 代数に関する国内・国外の研究内容、および研究代表者のこれまでの研究成果に基づき、以下の3課題を設定した。以下の課題を解決することで Koszul 代数の研究の発展に貢献することが、本研究の目的である。

課題 (1): **Koszul 性**と、**Gorenstein 性**や**正規性**等の他の環論的性質との関係を明らかにする。

課題 (2): **強 Koszul 性等**、**Koszul 性**から派生した**概念の研究**を行う。

課題 (3): **組合せ論的对象**から**トーリック環**を定め、それらの **Koszul 性**に関して分類を行う。

## 3. 研究の方法

2. **研究の目的**で述べた3課題のそれぞれに対し、いくつかの問題を設定しそれらを解決する、という研究方法をとる。

課題 (1) に関する問題: 研究代表者によって発見された、Koszul でない Gorenstein 二次代数の例は、埋入次元が7かつ Castelnuovo-Mumford 正則度が4であった。そこで、同様の例で埋入次元が6以下、もしくは Castelnuovo-Mumford 正則度が3であるものを構成する (Castelnuovo-Mumford 正則度が2以下の場合 Koszul になることが知られている)。

課題 (2) に関する問題: Conca-De Negri-Rossi の予想「強 Koszul 代数の定義イデアルは2次のグレブナー基底を持つ」を解決する。また、強 Koszul 整域は正規 Cohen-Macaulay であることを示す。

課題 (3) に関する問題: 研究業績 (Hibi-Matsuda [European J. Combin., 2016]) の一般化として、順序凸多面体の対から定まるトーリック環は常に Koszul となることを示す。

## 4. 研究成果

まず、課題(1)に関する問題である、Koszul でない Gorenstein 二次代数で、埋入次元が6以下もしくは Castelnuovo-Mumford 正則度が3の例の構成については、Mastroeni-Schenck-Stillman による2本の論文 (arXiv:1903.08265, arXiv:1903.08273) および McCullough-Secoleanu の論文 (arXiv:2004.10237) に先を越された。本研究課題の軸となる問題に対し完全敗北を喫する結果になったが、先駆的な例は研究代表者自身が構成できたこと、また前述の論文 arXiv:1903.08265 が Trans. Amer. Math. Soc. という良いジャーナルに掲載決定されたことがせめてもの慰めである。

研究期間中に挙げた研究成果を以下に述べる。

(1) **Castelnuovo-Mumford 正則度(以下正則度と略す)と $h$ 多項式の次数に関する研究**: 次数付き環に対し、そのヒルベルト関数の分子に現れる多項式を $h$ 多項式という。Cohen-Macaulay環に対しては、正則度と $h$ 多項式の次数が一致することが知られているが、一般の状況で、両者の不変量の間にはどのような関係があるかは知られていなかった。そこで、日比孝之氏(大阪大学)と共同

研究を行い、次の成果を得た：任意の正整数  $r, s$  に対し、正則度が  $r$  であり  $h$  多項式の次数が  $s$  であるような環が存在する。これにより、正則度と  $h$  多項式の次数の間には依存関係がないことが判明したことになる。この結果を論文 "Regularity and  $h$ -polynomials of monomial ideals" にまとめた。論文は Math. Nachr. に掲載された。

(2) **3-linear resolutionを持つエッジ環の分類**： $d$ 次の斉次元で生成される斉次イデアル(あるいはその剰余環)で linear resolution を持つものを、特に  $d$ -linear resolution を持つという。エッジ環は単純グラフに付随するトーリック環であり、大杉-日比により、2-linear resolution を持つエッジ環が分類されている。そこで、日比孝之氏および土谷昭善氏(大阪大学)と3-linear resolution を持つエッジ環について共同研究を行い、3-linear resolution を持つエッジ環は超平面に限る、という研究成果を得た。この結果を論文 "Edge rings with 3-linear resolutions" にまとめた。論文は Proc. Math. Amer. Soc. に掲載された。

(3) **エッジイデアルの正則度と  $h$  多項式の次数に関する研究**：研究成果(1)で述べたように、任意の正整数  $r, s$  に対し、正則度が  $r$  であり  $h$  多項式の次数が  $s$  であるような環が存在するであるが、そこで構成した環の定義イデアルは、次数が異なる無平方単項式で生成される単項式イデアルであった。この結果を踏まえると、生成系の次数が小さい単項式イデアルで同様のことができないか、という問題を考えるのは自然である。日比孝之氏および Adam Van Tuyl 氏 (McMaster University) と共同研究を行い、次の成果を得た：任意の正整数  $r, s$  に対し、剰余環の正則度が  $r$  であり、かつ  $h$  多項式の次数が  $s$  であるようなエッジイデアルが存在する。この結果を論文 "Regularity and  $h$ -polynomials of edge ideals" にまとめた。論文は Electron. J. Combin. から出版された。さらに、この結果の一般化として、両不変量に加えてグラフの誘導マッチング数も任意の値をとり得るという研究成果を得た(日比孝之氏、菅野裕樹氏(大阪大学)との共同研究)。この結果を論文 "Induced matching numbers of finite graphs and edge ideals" にまとめた。論文は J. Algebra に掲載された。

(4) **エッジイデアルの極値的ベッチ数(extremal Betti number)の研究**：日比孝之氏および木村杏子氏(静岡大学)と、エッジイデアルの極値的ベッチ数と正則度との相互関係について共同研究を行い、次の研究成果を得た：任意の正整数  $b, r$  に対し、剰余環の極値的ベッチ数の個数が  $b$  かつ正則度が  $r$  となるエッジイデアルが存在する。この結果を論文 "Extremal Betti numbers of edge ideals" にまとめた。論文は Arch. Math. (Basel) に掲載された。

(5) **Cameron-Walker グラフ(以下 C-W グラフと略す)に付随するエッジイデアルの研究**：C-W グラフとは、誘導マッチング数とマッチング数が等しいグラフのことである。日比孝之氏、木村杏子氏および土谷昭善氏と、C-W グラフに付随するエッジイデアルについて共同研究を行い、次の研究成果を得た：C-W グラフに付随するエッジイデアルの剰余環は、次元と  $h$  多項式の次数が等しい。この結果を論文 "Regularity and  $a$ -invariants of Cameron-Walker graphs" にまとめた。また、日比孝之氏、木村杏子氏、Adam Van Tuyl 氏と共同研究を行い、研究成果として、頂点数を固定した場合に、C-W グラフのエッジイデアルの剰余環が取り得る正則度と  $h$  多項式の次数がどのような値を取り得るかを決定することができた。この結果を論文 "The regularity and  $h$ -polynomials of Cameron-Walker graphs" にまとめた。

(6) **Gorenstein グラフィックマトロイドの分類**：グラフィックマトロイドは連結単純グラフから定まるマトロイドであり、グラフィックマトロイドに付随するトーリック環は常に Cohen-Macaulay となることが知られている。これを踏まえ、日比孝之氏、Michal Lason 氏 (Polish Academy of Sciences), Mateusz Michalek 氏 (Max Planck Institute), Martin Vodicka 氏 (Max Planck Institute) と共同研究を行い、研究成果として、対応するグラフィックマトロイドが Gorenstein (すなわち、付随するトーリック環が Gorenstein) となる連結単純グラフを完全に分類することができた。この結果を論文 "Gorenstein graphic" にまとめた。論文は Israel J. Math. に掲載決定している。

(7) **連結単純グラフの3種のマッチング数と、対応するエッジイデアルの次元の相互関係**：連結単純グラフ  $G$  に対し、マッチング数、最小マッチング数、誘導マッチング数が定義される。平野文菜氏(北見工業大学)と、上記3種のマッチング数と、 $G$  のエッジイデアルによる剰余環の次元との間の相互関係について共同研究を行い、研究成果として、それらの相互関係を完全に調べ上げることができた。この結果を論文 "Matching numbers and dimension of edge ideals" にまとめた。

にまとめた。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 11件／うち国際共著 1件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hibi Takayuki, Kimura Kyouko, Matsuda Kazunori	4. 巻 113
2. 論文標題 Extremal Betti numbers of edge ideals	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Archiv der Mathematik	6. 最初と最後の頁 149 ~ 155
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1007/s00013-019-01322-9">https://doi.org/10.1007/s00013-019-01322-9</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hibi Takayuki, Matsuda Kazunori	4. 巻 44
2. 論文標題 Lexsegment Ideals and Their h-Polynomials	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Acta Mathematica Vietnamica	6. 最初と最後の頁 83 ~ 86
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1007/s40306-018-0297-5">https://doi.org/10.1007/s40306-018-0297-5</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hibi Takayuki, Matsuda Kazunori, Van Tuyl Adam	4. 巻 26
2. 論文標題 Regularity and h-Polynomials of Edge Ideals	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 The Electronic Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.37236/8247">https://doi.org/10.37236/8247</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Hibi Takayuki, Matsuda Kazunori, Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 121
2. 論文標題 Quadratic Grobner bases arising from partially ordered sets	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 MATHEMATICA SCANDINAVICA	6. 最初と最後の頁 19 ~ 25
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="http://dx.doi.org/10.7146/math.scand.a-26246">http://dx.doi.org/10.7146/math.scand.a-26246</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 MATSUDA KAZUNORI、SUZUKI TAO、TSUCHIYA AKIYOSHI	4. 巻 60
2. 論文標題 NONINCREASING DEPTH FUNCTIONS OF MONOMIAL IDEALS	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Glasgow Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 505 ~ 511
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1017/S0017089517000349">https://doi.org/10.1017/S0017089517000349</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Matsuda Kazunori	4. 巻 25
2. 論文標題 Weakly Closed Graphs and F-Purity of Binomial Edge Ideals	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Algebra Colloquium	6. 最初と最後の頁 567 ~ 578
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1142/S1005386718000391">https://doi.org/10.1142/S1005386718000391</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Matsuda Kazunori	4. 巻 123
2. 論文標題 Non-Koszul quadratic Gorenstein toric rings	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 MATHEMATICA SCANDINAVICA	6. 最初と最後の頁 161 ~ 173
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.7146/math.scand.a-105278">https://doi.org/10.7146/math.scand.a-105278</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hibi Takayuki、Matsuda Kazunori、Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 147
2. 論文標題 Edge rings with $\mathbb{S}^3$ -linear resolutions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3225 ~ 3232
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1090/proc/14382">https://doi.org/10.1090/proc/14382</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hibi Takayuki, Matsuda Kazunori	4. 巻 291
2. 論文標題 Regularity and h-polynomials of monomial ideals	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 2427 ~ 2434
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1002/mana.201700476">https://doi.org/10.1002/mana.201700476</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hibi Takayuki, Kanno Hiroju, Matsuda Kazunori	4. 巻 532
2. 論文標題 Induced matching numbers of finite graphs and edge ideals	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 311 ~ 322
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.04.036">https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.04.036</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Matsuda Kazunori, Ohsugi Hidefumi, Shibata Kazuki	4. 巻 7
2. 論文標題 Toric Rings and Ideals of Stable Set Polytopes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.3390/math7070613">https://doi.org/10.3390/math7070613</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 松田 一徳
2. 発表標題 Castelnuovo-Mumford正則度とh多項式の次数についてI, II
3. 学会等名 第22回静岡代数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 土谷 昭善, 日比 孝之, 松田 一徳
2. 発表標題 Edge rings with 3-linear resolutions
3. 学会等名 日本数学会2018年度秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 日比 孝之, 松田 一徳
2. 発表標題 Lexsegment ideals and their h-polynomials
3. 学会等名 第40回可換環論シンポジウム
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 日比 孝之, 木村 杏子, 松田 一徳
2. 発表標題 エッジイデアルの extremal ベッチ数
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 日比孝之, 松田一徳
2. 発表標題 単項式イデアルの Castelnuovo-Mumford 正則度と h 多項式の次数について
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松田一徳
2. 発表標題 Regularity and h-polynomials of monomial ideals
3. 学会等名 第30回可換環論セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松田一徳
2. 発表標題 Regularity and h-polynomials of monomial ideals
3. 学会等名 日本大学特異点論月曜セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 松田一徳
2. 発表標題 順序凸多面体の対の正規性について
3. 学会等名 日本数学会2017年度秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 松田一徳
2. 発表標題 Introduction to Hibi rings (1), (2)
3. 学会等名 第14回可換環論サマースクール
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kazunori Matsuda
2. 発表標題 Gorenstein graphic matroids
3. 学会等名 Commutative Algebra and Lattice Polytopes (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松田 一徳
2. 発表標題 有限単純グラフの binomial edge ideals
3. 学会等名 組合せ論と可換代数オートムセミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松田 一徳
2. 発表標題 Regularity and a-invariant of Cameron-Walker graphs
3. 学会等名 第32回可換環論セミナー
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

researchmap <a href="https://researchmap.jp/kazmatsuda/">https://researchmap.jp/kazmatsuda/</a>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----