

令和 6 年 6 月 7 日現在

機関番号：14501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2023

課題番号：17K14166

研究課題名(和文) 保型L函数の特殊値の明示式とその応用

研究課題名(英文) Explicit formulas of special values of automorphic L-functions and their applications

研究代表者

森本 和輝 (Morimoto, Kazuki)

神戸大学・理学研究科・准教授

研究者番号：20725254

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：L函数の特殊値と保型形式の周期を結ぶ明示公式に取り組んだ。その結果として、 $(SO(5), SO(2))$  の場合のGross-Prasad予想並びに、精密化Gross-Prasad予想に関して一般的に証明することが出来た。また、Whittaker周期の市野-池田型公式についてのLapid-Mao予想を、ユニタリ群の場合にWhittaker周期を持つ任意の既約カスピダル保型表現について証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

現代数論の研究において、ゼータ関数一般化であるL関数は最も重要な研究対象の一つだと考えられている。BSD予想で期待されているように、L関数の特殊値は多くの数論的情報を含むと考えられている。本研究では、保型表現に付随するL関数に関して特殊値の明示公式を考察した。特に、ジーゲル保型形式に付随するL関数の中心値の明示公式に関するBoechrer予想を解決することが出来た。楕円保型形式が楕円曲線と対応(志村-谷山予想)したように、ジーゲル保型形式はアーベル曲面との対応が期待されており、この対応が確立されれば、本研究で得られた公式の様々な数論的が期待される。

研究成果の概要(英文)：I studied a relationship between special values of L-functions and periods automorphic forms. As a consequence, I proved the Gross-Prasad conjecture and the refined Gross-Prasad conjecture in the case of  $(SO(5), SO(2))$ . Also, I proved Lapid-Mao conjecture, which conjectures Ichino-Ikeda type formula of Whittaker periods, for any irreducible cuspidal automorphic representation when it has Whittaker periods.

研究分野：保型表現

キーワード：保型L関数 保型形式の周期

## 1. 研究開始当初の背景

現代の数論の研究において、ゼータ函数はその中心に位置している。特に、Birch & Swinnerton-Dyer 予想や Bloch-Kato 予想では、ゼータ函数の特殊値は数論的不変量によって記述されると予想しており、ゼータ函数の特殊値は数論的情報を豊富に含んでいることが期待出来る。一方で、ラングランズ予想によると、数論的なゼータ函数は、適当な保型表現・保型形式に付随する L 函数 (=保型 L 函数) と一致することが期待されている。これらのことから、保型 L 函数の特殊値の研究は数論において重要な課題の一つとなっている。

保型形式の周期は、保型形式の適当な積分によって定義される保型表現の不変量の一つである。保型形式の周期と保型 L 函数の特殊値の関係については様々な状況で考察されてきた。さらに、その関係を用いることで、上記の観点から期待されるような様々な数論的結果が証明されてきた。例えば、Waldspurger 公式では、 $GL(2)$  の保型表現の L 函数の中心値とトラス周期とを結ぶ明示公式を与えている。この公式では保型形式として楕円モジュラー形式に適用することができ、この場合に公式に現れる局所積分を精緻に調べることで、楕円曲線に関する様々な結果をもたらしてきた。

Waldspurger 公式の高次元化として、Boecherer は Siegel モジュラー形式の特殊 Bessel 周期と L 函数の中心値とを結ぶ明示公式の存在を予想した。一方で、市野-池田らにより Gross-Prasad 予想の精密化として、特殊直交群の Bessel 周期と適当なテンソル積 L 函数の中心値とを結ぶ、市野-池田型公式と呼ばれる明示公式が予想された。Dickson-Pitale-Saha-Schmidt らにより、 $(SO(5), SO(2))$  の場合の特殊 Bessel 周期、つまり  $SO(2)$  の表現が自明表現の場合の市野-池田型公式に現れる局所積分を計算することにより、Boecherer 予想により期待された明示公式を定数なども明確に定めた形で定式化することに成功した。

古澤昌秋氏(大阪公立大)との共同研究において、 $(SO(2n+1), SO(2))$  の特殊 Bessel 周期に関しては、無限素点が離散系列表現という仮定の下で市野-池田型公式を証明し、その結果として Boecherer 予想を証明した。

市野-池田型公式は Bessel 周期だけでなく他の周期についても考察されており、Lapid-Mao は Whittaker 周期について市野-池田型公式の類似を予想した。Lapid-Mao 予想では、元の市野-池田型公式とは異なり、保型形式の増大度に関する条件である緩増加条件を必要とせず、興味深い類似となっている。

## 2. 研究の目的

$(SO(5), SO(2))$  の特殊 Bessel 周期についての市野-池田型公式を用いた算術的・解析的応用、並びにユニタリ群の Whittaker 周期についての明示公式の確立・応用を目指した。

## 3. 研究の方法

$(SO(5), SO(2))$  の特殊 Bessel 周期についての市野-池田型公式の算術的応用の一つである  $p$  進 L 函数の構成に関しては、本研究開始後の 2018 年に山名俊介氏(大阪公立大)と Ming-Lun Hsieh(National Taiwan University)により、一般の  $(SO(5), SO(2))$  の Bessel 周期の明示公式が成り立つという仮定の下で、適当な  $p$  進 L 函数を構成された。また、相対跡公式と市野-池田型公式とを組み合わせた解析的応用などを考察した結果、特殊 Bessel 周期だけでなく、一般の Bessel 周期に関して明示公式の確立にまずは取り組むべきであると考え、古澤昌秋氏との共同研究としてその証明に取り組んだ。

特殊 Bessel 周期の場合の市野-池田型公式の証明では、斜交群や特殊直交群などの等長群のテータ対応を用いていた。しかし、このテータ対応では  $SO(2)$  の表現を非自明なものにすることは難しいということがわかった。その後、一般四元数ユニタリ群、一般ユニタリ群、一般斜交群、一般特殊直交群についてのテータ対応を組み合わせることにより、 $(SO(5), SO(2))$  の全ての Bessel 周期に関して市野-池田型公式を証明することが出来た。その結果として、Boecherer 予想で考察された Fourier 係数の和を、重み付きの Fourier 係数の和へと拡張した一般化 Boecherer 予想を証明することが出来た。この公式の証明には、ユニタリ群  $(U(2n), U(1))$  と一般ユニタリ群  $(GU(2n), GU(1))$  の場合に Bessel 周期の市野-池田型公式が必要であったが、この公式については、ユニタリ群の間のテータ対応を用いることで証明することが出来た。

一般化 Boecherer 予想の新たな応用として、対称積 L 函数の特殊値の代数性についての結果が得られることがわかったが、Deligne 予想から期待されるものとの整合性がはっきりとしないものであった。しかしその後、一般化 Boecherer 予想ではなく、Jie Lin と Harald Grobner に

よる L 関数の商についての代数性の結果を代わりに用いることで、4 次と 6 次の対称積 L 関数に関して、期待される代数性を証明することが出来た。

Lapid-Mao 予想はユニタリ群の場合には、適当な局所予想へと還元出来ることが Lapid-Mao によって証明されていた。さらに、彼らは  $p$  進体上のメタプレクティック群の場合に類似の局所予想を証明していた。また、市野-Lapid-Mao はメタプレクティック群の場合の局所予想と形式次数予想との同値性を示し、その結果として形式次数予想を証明した。

Lapid-Mao によるメタプレクティック群の場合の証明に倣い、偶数次ユニタリ群の場合に  $p$  進体上の局所予想に取り組んだ。非分裂素点、分裂素点どちらの場合にも、適当なモデルの変換公式を証明し、それをを用いることで局所予想を証明することができた。その結果として、 $p$  進体上のユニタリ群の場合に、形式次数予想を証明することが出来た。また、奇数次の場合への取り組みの第一歩として、David Soudry(Tel Aviv University)との共同研究として、Descent method に現れる局所ゼータ積分に関して基本的な性質を証明した。

非常に最近、Beuzart-Plessis と Chaudouard により緩増加な保型表現に関して、奇数次のユニタリ群の場合に Lapid-Mao 予想が証明された。彼らの結果、 $p$  進体上の局所予想、テータ対応、適当な局所体上の表現の大域化などを用いることで、偶数次ユニタリ群の場合には、実素点においても局所予想を証明することが出来た。また、複素素点においては、局所予想自体を証明することはできなかったが、類似の結果を得ることができ、それらを合わせることで偶数次ユニタリ群の場合に、Lapid-Mao 予想を証明することが出来た。また、テータ対応を用いることで、偶数次の場合から奇数次の場合にも Lapid-Mao 予想を証明することができた。

#### 4. 研究成果

一般化 Boecherer 予想を含む( $SO(5)$ ,  $SO(2)$ )の場合の Bessel 周期の市野-池田型公式についての論文は *Compo. Math.* に掲載が決定している。この結果は、上で述べた山名-Hsieh の結果の仮定を取り除くだけでなく、Abhishek Saha や都築正男氏などの論文において、この公式を用いた解析的な応用が与えられている。ユニタリ群の場合の Bessel 周期の市野-池田型公式については、相対跡公式により近年目覚ましい進展を遂げているが、直交群の場合の市野-池田型公式については、2008 年に( $SO(4)$ ,  $SO(3)$ )の場合が市野氏によって証明されて以来、一般に証明された新たなケースである。また、これまでのテータ対応を用いた特殊値の明示公式の研究では、一つの双対ペアの間で明示公式をうつすもののみであったが、本研究では異なるタイプの双対ペアを複数用いることで、明示公式を移すというこれまでに見られなかった手法を用いている。

偶数次ユニタリ群の場合の Bessel 周期の市野-池田型公式についての結果は、国際学術誌に投稿し、査読受審中である。この論文では、ユニタリ群のみならず、分裂する場合つまり( $GL(2n)$ ,  $GL(1)$ )の場合の Bessel 周期の市野-池田型公式についても考察している。 $GL(n)$  の場合には、Rallis 内積公式やテータリフトのモデルの変換に関して考察された論文がなく、本論文で得られた結果だけでなくこれらの議論についても今後のテータリフトを用いた研究において有用であると思われる。

対称積 L 関数の特殊値の代数性については、2 次の場合には Sturm、3 次の場合には Garrett や Orloff らによる結果があった。これらは L 関数の積分表示を用いたもので、一般の次数に拡張することは難しいと考えられていた。一方で、今回得られた研究結果における議論では、積分表示を必要とせず他の L 関数についても代数性が期待できる議論ある。実際、類似手法が最近 Shih-Yu Chen により考察され、高次の場合についても対称積 L 関数の特殊値の代数性が証明された。本研究成果は *Math. Z.* に掲載された。

形式次数予想の証明を含む局所予想についての論文は *J. of Inst. Math. Jussieu* に掲載された。この論文では付録として、適当な Oscillatory integral についての安定性を証明している。この結果は分裂する群については Lapid-Mao により証明されていたが、それを一般化し準分裂群に対して証明している。この結果により Bessel 関数を定義することができ、Bessel 関数の性質や応用を考察する上で重要な結果であると考えられる。また、ユニタリ群の場合の局所ゼータ積分に関する Soudry との共著は *J. of Number Theory* に掲載された。

ユニタリ群の場合の Lapid-Mao 予想の証明についての論文は国際学術誌に投稿し、査読受審中である。この論文では、緩増加条件を課さない保型表現に関して、任意の次数のユニタリ群に対して市野-池田型公式を証明している。これまでに証明された明示公式では低次数のものを除いて、緩増加条件を課さない状況で一般に証明されたものはなかった。このことからこの公式は、一般次数の場合に緩増加が証明されていない、例えば無限素点でコホモロジカルとならない場合についてもこの公式は適用することができる。これは保型 L 関数の解析的応用を考察する上で非常に有益であると思われる。また、実素点において証明した偶数次ユニタリの場合の局所予想は、形式次数予想の一種の一般化と考えることができ、リー群の表現論という観点からも興味深い結果である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kazuki Morimoto	4. 巻 4
2. 論文標題 ON A CERTAIN LOCAL IDENTITY FOR LAPID?MAO ' S CONJECTURE AND FORMAL DEGREE CONJECTURE : EVEN UNITARY GROUP CASE	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu	6. 最初と最後の頁 1107 ~ 1161
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S1474748020000523	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Furusawa Masaaki、Morimoto Kazuki	4. 巻 23
2. 論文標題 Refined global Gross-Prasad conjecture on special Bessel periods and Boecherer ' s conjecture	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the European Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1295 ~ 1331
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/jems/1034	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Morimoto Kazuki、Soudry David	4. 巻 216
2. 論文標題 On L-functions for $U_{2n+1} \times \text{Res}_{E/F} \text{GL}_m$ ( $m > n$ )	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 83 ~ 141
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2020.05.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kazuki Morimoto	4. 巻 Vol. 2020, No. 4,
2. 論文標題 Model transition for representations of unitary type	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 1112-1203
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rny048	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kazuki Morimoto	4. 巻 337
2. 論文標題 On tensor product L-functions for quaternion unitary groups and $GL(2)$ over totally real number fields: mixed weight cases	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 317-362
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2018.08.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masaaki Furusawa, Kazuki Morimoto	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Refined global Gross-Prasad conjecture on special Bessel periods and Boecherer's conjecture	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of the European Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kazuki Morimoto	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Model transition for representations of unitary type	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rny048	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計14件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 10件)

1. 発表者名 Kazuki Morimoto
2. 発表標題 On Ichino-Ikeda type formula of Whittaker periods for even unitary groups
3. 学会等名 第9回京都保型形式研究集会 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kazuki Morimoto
2. 発表標題 On Ichino-Ikeda type formula of Bessel periods for $(U(2n), U(1))$ and $(GL(2n), GL(1))$
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「保型表現の解析的・数論的研究」(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 森本 和輝
2. 発表標題 ( $S(5), S(2)$ )のBessel周期の市野-池田型の公式と一般化されたBoecherer予想
3. 学会等名 早稲田大学整数論セミナー(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森本 和輝
2. 発表標題 On Ichino-Ikeda type formula of Whittaker periods for even unitary groups
3. 学会等名 National University of Singapore, Representation Theory and Number Theory(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森本 和輝
2. 発表標題 ( $S(5), S(2)$ )のBessel周期の市野-池田型公式について
3. 学会等名 RIMS研究集会「保型形式,保型表現,ガロア表現とその周辺」(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kazuki Morimoto
2. 発表標題 On Gan-Gross-Prasad conjecture for $(U(2n), U(1))$
3. 学会等名 Representation Theory Workshop 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kazuki Morimoto
2. 発表標題 On Gross-Prasad conjecture for $(SO(2n+1), SO(2))$
3. 学会等名 KIAS seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kazuki Morimoto
2. 発表標題 On Gan-Gross-Prasad conjecture for $(U(2n), U(1))$ and $(SO(5), SO(2))$
3. 学会等名 南大阪保型表現セミナー (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kazuki Morimoto
2. 発表標題 On Gan-Gross-Prasad conjecture for $(U(2n), U(1))$ and $(SO(5), SO(2))$
3. 学会等名 RIMS研究集会「保型形式とL関数の解析的, 幾何的, p進的研究」(招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 森本和輝
2. 発表標題 対称積L関数の特殊値とRamakrishnan-Shahidi liftの周期関係式について
3. 学会等名 京都大学数学教室談話会（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 森本和輝
2. 発表標題 On a certain local identity for Lapid-Mao's conjecture in the even unitary group case
3. 学会等名 神戸整数論集会2017（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 森本和輝
2. 発表標題 次数 2 の Siegel モジュラー形式の L 関数の中心値の明示公式について
3. 学会等名 東京電機大学数学講演会（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 森本和輝
2. 発表標題 On a certain local identity for an explicit formula of Whittaker periods on the even unitary group
3. 学会等名 Workshop ``Special values of automorphic L-functions, periods of automorphic forms and related topics''（国際学会）
4. 発表年 2017年



1. 発表者名 森本和輝
2. 発表標題 U(2n) の Whittaker 周期の明示公式について
3. 学会等名 九州代数的整数論2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 RIMS conference ``Automorphic form, automorphic L-functions and related topics"	開催年 2022年 ~ 2022年
国際研究集会 Workshop ``Special values of automorphic L-functions, periods of automorphic forms and related topics''	開催年 2017年 ~ 2017年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関