

令和 4 年 4 月 26 日現在

機関番号：14501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K14167

研究課題名(和文)代数的トーサーのモデルの研究

研究課題名(英文)Studies on models of algebraic torsors

研究代表者

三井 健太郎(Mitsui, Kentaro)

神戸大学・理学研究科・助教

研究者番号：70644889

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文):正規整スキーム上の代数群の一般ファイバーは関数体上の代数群である。関数体上の代数群のトーサー(主等質空間)から正規整スキーム上の代数群が作用する対称性の高い幾何学的モデル(代数群作用を持つ代数多様体族)を構成する方法を研究した。また、そのようなモデルの相対コンパクト化についても研究した。さらに、構成に伴って現れる特異点の具体的な特異点解消について研究し、2次元の場合に特異点に付随する不変量を計算した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

トーサーのモデルの特異ファイバーの不変量を体系的に研究するため底空間について局所化し、代数多様体族の局所理論を研究した。その際に、完備離散付値体上の代数多様体へ形式幾何やリジッド幾何を応用し、代数的手法だけでは解決困難であった問題を解析幾何学的手法を用いて研究した。また、トーサーのモデルは有限群による商として構成するので商特異点論を発展させ応用した。正標数体上の商特異点について知られていることは少ないが、今回の研究成果により2次元の様々な場合に不変量を計算できるようになった。

研究成果の概要(英文):The generic fiber of an algebraic group over a normal integral scheme is an algebraic group over the function field. First, we studied construction methods of geometric models over the normal integral scheme with large symmetry (families of algebraic varieties with actions of the algebraic group) of torsors (principal homogeneous spaces) under the algebraic group over the function field. Secondly, we studied their relative compactification. Finally, we studied singularities of dimension two appearing in the above construction and obtain methods to compute invariants associated with the singularities.

研究分野：代数幾何学

キーワード：トーサー 主等質空間 Galoisコホモロジー モデル ネロンモデル アーベル多様体 有理点 閉点

## 1. 研究開始当初の背景

束構造を持つ代数多様体の分類は発展途上にあり、代数幾何における重要な問題の一つである。しかし、低次元の場合を除き、Hodge 数、小平次元、基本群といった不変量の具体的な計算は一般には困難である。従って、束構造を持つ代数多様体の分類において不変量の計算法の確立は主問題である。また、基礎体の標数が 0 の場合と比べ、正標数の場合、この問題はより難しく解明されていない点が多い。

一方、整スキームの関数体上定義された代数多様体の研究では、局所大域原理に代表されるように、整スキーム上のモデル(代数多様体族)を考察する方法は有効である。代数多様体上に閉点を見つけることができれば基底変換と降下理論で、有理点を持つ、より単純な代数多様体の場合へ研究を帰着できる。閉点の次数は小さい方が良い。閉点の最小次数を求める問題は一般には困難であるが、近年の研究でモデルの幾何との関係が明らかになってきた。

## 2. 研究の目的

一次元関数体上の楕円曲線のトーサー(主等質空間)とその幾何学的モデルである楕円曲面に付随する不変量の計算法は長い研究を経て確立されてきた。本研究では、楕円曲線の場合にしか知られていなかった結果を一般の代数群の場合へ拡張する。まず、代数群のトーサーに対し幾何学的モデルを構成する。次に、モデルの双対化層や基本群の計算法を確立するため特異ファイバーを研究する。また、応用としてトーサー上の閉点の次数を研究する。最後に、トーサー及びモデルの幾何と、トーサーを分類する群コホモロジーの関係を解明する。これらにより、トーサーやそのモデルに付随する不変量の計算法が確立され、束構造を持つ代数多様体への理解が深まると期待できる。

## 3. 研究の方法

正規整スキーム上の滑らかな群スキームを基底変換し、関数体上の代数群を得る。まず代数群のトーサーに対し(群スキームが作用する)モデルを構成する。ここで、モデルは代数多様体族であり、底空間が代数多様体である場合は束構造を持つ代数多様体になる。モデルが底空間上固有でない場合には相対的コンパクト化を試みる。例えば、底空間が 1 次元で群スキームが楕円曲線のネロンモデルの場合、固有なモデルは種数 1 の曲線の固有正則モデルとして得られる。一般のアーベル多様体の場合はネロンモデルの同変コンパクト化問題と関係しているおり、この問題に取り組む。さらに、モデルの特異ファイバーを研究し、不変量の計算法を与え、応用としてモデルを不変量で分類する。

## 4. 研究成果

一次元関数体上の代数群のトーサーとその幾何学的モデルに付随する不変量の計算法について、代数群が楕円曲線の場合にしか知られていなかった結果を一般の代数群の場合へ拡張するために、代数群のトーサーに対して幾何学的なモデルの構成を試みた。具体的には、楕円曲線のトーサーから楕円曲面を構成する方法を、より一般の代数群の場合へ拡張した。トーサーを分類する Galois コホモロジーは代数群上の有限次分離的閉点全体からなる Galois 群の作用する群を用いて構成できる。このコホモロジーの元を底空間方向へ延長し、コホモロジーの元に対してモデルの概念を導入した。さらに、このコホモロジーの元のモデルから有限群による同変作用を作り、その商によりトーサーのモデルを構成した。より正確には、正規整スキーム上の滑らかな群スキームを基底変換して得られる関数体上の代数群をとり、その代数群のトーサーに対し、元の群スキームが作用するような対称性の高いモデルを構成した。また、このようなモデルが存在することと、コホモロジーの元にモデルが存在することは同値であることを示した。これらの同値な条件は代数群のトーサーを分類している Galois コホモロジーの元の持つ性質を用いて具体的に記述できる。さらに、コホモロジーのモデルの同型類を別に定義した Galois コホモロジーを用いて分類し、特殊化によりトーサーを分類する Galois コホモロジーへの写像を構成した。ここで用いたモデルの構成方法は、トーサー以外の代数群が作用している代数多様体の場合にも一般化できる。応用範囲を広げるために、より一般の場合も扱えるよう理論の整備を進めた。

群スキームが作用するモデルが底空間上固有でない場合は、群スキームが作用するようなモ

デルの相対コンパクト化を試みた。まず、トーサーが良い条件を満たすとき、底空間上固有であるようなモデルが構成できることを示した。この条件は、群スキームの同変コンパクト化の構成問題と関係付けられる。例えば、底空間がデデキントスキームであり、群スキームが準安定還元を持つ曲線のヤコビ多様体のネロンモデルである場合には、同変コンパクト化の存在が知られているので、底空間上固有なモデルを構成できる。一般のアーベル多様体の場合も、モデルの相対コンパクト化の問題は、ネロンモデルの同変コンパクト化問題と関係している。代数群が分裂トラス還元を持つようなアーベル多様体の場合には、ネロンモデルの連結成分が作用するような相対コンパクト化は、凸幾何の応用により構成できることが知られている。中村郁氏の協力のもと、ネロンモデル全体が作用するような相対コンパクト化を一定の条件の下に構成した。この問題に取り組むため、リジッド幾何によるアーベル多様体の一意化理論を応用した。さらに、複素解析的な場合の相対コンパクト化の手法を代数化してこの問題に取り組んだ。底空間が1次元で群スキームが楕円曲線のネロンモデルの場合には退化に関する条件の付かない一般的な結果が得られ、種数1の曲線へのヤコビ多様体の作用が曲線の極小正則モデルへのヤコビ多様体のネロンモデルの作用に一意的に拡張できることを示した。

また、トーサー上の閉点の次数も研究した。代数群が可換である場合、トーサーを分類する Galois コホモロジーは可換群になるので、トーサーに対応する元の位数  $P$  が得られる。トーサー上の  $0$ -サイクルの最小正次数を  $l$  で表す。 $P$  はコホモロジー論的なトーサーの複雑さを測り、 $l$  は有理点を持たない代数多様体の複雑さを測る。 $l$  を  $P$  で上から評価する問題は、Brauer 群の研究に端を発しこれまで様々な角度から研究されてきた。モデルへの切断は一般ファイバへの制限によりトーサーの有理点(次数1の閉点)を与える。この事実の一般化により、モデルへの多重切断からトーサー上の閉点を得られ、その次数を計算できる。閉点の最小次数の評価は  $l$  の評価の精密化に繋がり更に困難であるが、このようにモデルの幾何を活用し、 $P$  を用いて閉点の最小次数に良い評価を与えた。

特別な場合として代数的楕円曲面の特異ファイバーを研究し、小平次元0の楕円曲面を曲面やファイブレーションの不変量について分類した。小平次元を始めとする曲面の不変量は標準束から計算できる。標準束を求める標準束公式を応用するには、特異ファイバーから定まる底空間に関して局所的な不変量を求める必要があるため特異ファイバーを詳しく研究した。特異ファイバーは重複度を持つとき多重ファイバーと呼ばれる。複素解析楕円曲面の場合には、全ての多重ファイバーは対数変換で構成可能である。また、代数的楕円曲面で基礎体の標数が0の場合には、全ての多重ファイバーは対数変換、代数化、ある種の局所大域原理で構成できることが知られている。正標数の場合には、局所完備付値環上の楕円ファイブレーションで多重ファイバーが構成できれば上述の局所大域原理を用いて大域化できるので、例を構成する際にも局所的な場合を研究する必要がある。算術幾何を応用して局所的な場合に、与えられたファイブレーションの不変量や、与えられた不変量を持つファイブレーションの非存在性を研究した。一般に楕円曲面の小平次元は1以下である。小平次元が0以外の楕円曲面に関しては先行研究があり、有理曲面や多重種数が小さい小平次元1の楕円曲面についてはどのような特異ファイバーが現れるか知られていた。今回の研究では類似の結果を小平次元0の場合に得た。小平次元0の楕円曲面に現れ得る多重ファイバーの組み合わせは Bombieri と Mumford により研究され表が与えられていた。該当する全ての曲面を体系的に構成することで、表にある組み合わせのうちの一部は実際には存在しないことを示した。この非存在性については算術幾何を応用した別の方法でも証明し、その理論的背景を明らかにした。

また、モデルの不変量を求める方法を確立するため商特異点や商写像の分岐についても研究した。正標数基礎体の標数を  $p$  とする。位数が  $p$  で割り切れる有限群が曲面に作用している場合、その商特異点についてわかっていることは少なかった。有限群の位数が丁度一回だけ  $p$  で割れ、さらにその群による作用が二軸に分かれている場合に、トーリック幾何を応用することで極小特異点解消の具体的方法が得られた。この特異点解消により得られる例外因子の交差形式は丁度三つの Hirzebruch-Jung 連分数を用いて計算できる。この結果を応用し、商特異点に付随する様々な不変量を計算した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Kentaro Mitsui	4. 巻 223
2. 論文標題 Frobenius base change of torsors	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 553-570
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jpaa.2018.04.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mitsui Kentaro	4. 巻 2017
2. 論文標題 Models of torsors under elliptic curves	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Publications Mathe'matiques de Besanc-on	6. 最初と最後の頁 79-108
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5802/pmb.16	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Mitsui Kentaro	4. 巻 71
2. 論文標題 Quotient singularities of products of two curves	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Annales de l'Institut Fourier	6. 最初と最後の頁 1493-1534
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5802/aif.3434	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計13件（うち招待講演 13件/うち国際学会 8件）

1. 発表者名 Kentaro Mitsui
2. 発表標題 Models of torsors under algebraic groups
3. 学会等名 Xiamen mini workshop in Arithmetic Geometry（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kentaro Mitsui
2. 発表標題 Frobenius base change of torsors
3. 学会等名 CNU Workshop on Arithmetic Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kentaro Mitsui
2. 発表標題 Quotient singularities of products of two curves
3. 学会等名 Toric geometry, degenerations and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Iku Nakamura
2. 発表標題 Relative compactification of semiabelian N'eron models
3. 学会等名 Toric geometry, degenerations and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kentaro Mitsui
2. 発表標題 Models of torsors under algebraic group
3. 学会等名 The 17th Affine Algebraic Geometry Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kentaro Mitsui
2. 発表標題 Frobenius base change of torsors
3. 学会等名 正標数の代数幾何とその関連する話題 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kentaro Mitsui
2. 発表標題 Logarithmic good reduction and the index
3. 学会等名 Log geometry, degenerations and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kentaro Mitsui
2. 発表標題 Frobenius base change of torsors
3. 学会等名 野田代数幾何学シンポジウム2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Iku Nakamura
2. 発表標題 半アーベル的なネロン・モデルの相対コンパクト化
3. 学会等名 湯布院代数幾何学ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kentaro Mitsui
2. 発表標題 Quotient singularities of products of two curves
3. 学会等名 第7回代数幾何学研究集会---宇部--- (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kentaro Mitsui
2. 発表標題 Models of torsors under algebraic groups
3. 学会等名 第15回代数・解析・幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kentaro Mitsui
2. 発表標題 Logarithmic good reduction and the index
3. 学会等名 ホッジ理論と代数幾何学 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kentaro Mitsui
2. 発表標題 Canonical bundle formula and base change
3. 学会等名 Workshop蘇州大学 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------