

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 2 日現在

機関番号：24405

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2023

課題番号：17K14168

研究課題名（和文）量子二重ブリュア胞体の双対標準基底の研究

研究課題名（英文）Quantum double Bruhat cells and dual canonical bases

研究代表者

木村 嘉之 (Kimura, Yoshiyuki)

大阪公立大学・国際基幹教育機構・特任講師

研究者番号：10637010

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、大矢浩徳氏との共同研究において、量子冪単胞体に対する捻り自己同型の量子類似を構成し、双対標準基底を保つことを示しました。これにより、Berenstein-Rupelの予想を解決しました。また、Geiss-Leclerc-Schroerの加法的圏論化を利用して、量子クラスター単項式が量子捻り自己同型によって保たれることを証明しました。さらに、Fan Qin氏およびQiaoling Wei氏との共同研究で、量子クラスター代数における捻り自己同型を定式化し、その保存性を示しました。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子クラスター代数は、数学と物理学の融合を促進する重要な研究分野です。多元環の表現論、高階タイヒミュラー理論、トーリック退化、Donaldson-Thomas不変量、Poisson Lie群、離散可積分系など多岐にわたる分野と関連し、新しい代数構造の理解を深めます。特に、量子群の表現論における標準基底との関係を明らかにすることで、理論の発展に貢献します。

研究成果の概要（英文）：In this research, in a joint work with Hironori Oya, we constructed the quantum analogue of twist automorphisms for quantum unipotent cells and demonstrated that they preserve the dual canonical bases. This achievement resolved the Berenstein-Rupel conjecture. Additionally, utilizing the additive categorification by Geiss, Leclerc, and Schroer, we proved that quantum cluster monomials are preserved by these quantum twist automorphisms. Furthermore, in a joint work with Fan Qin and Qiaoling Wei, we formulated twist automorphisms in quantum cluster algebras and showed that quantum cluster monomials are preserved.

研究分野：代数学

キーワード：代数学 表現論 量子座標環 双対標準基底 量子クラスター代数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

クラスター代数および量子クラスター代数は、Fomin-Zelevinsky および Berenstein-Zelevinsky によって導入され、量子群の標準基底の理論の一般化を期待されていた。これらの代数は変異操作を用いて定義され、多元環の表現論や高階タイヒミュラー理論、Poisson Lie 群などと関連しています。特に、二重ブリュア胞体のクラスター代数構造は Berenstein-Fomin-Zelevinsky によって構成され、量子二重ブリュア胞体の構造は Goodearl-Yakimov によって、量子捻り写像を用いて構成されていた。しかしながら、これらは量子離散可積分系や高階量子タイヒミュラー理論など、様々な分野において重要ですが、未解明な点が多く残されていた。

Geiss-Leclerc-Schröer は、群が対称型の場合に、簡約化された二重ブリュア胞体の特別な場合である冪単胞体の座標環のクラスター代数構造と Lusztig による双対半標準基底との関係を加法的圏化を介して研究していた。特に、前射影多元環の表現論を用いて、Berenstein-Zelevinsky による冪単胞体の捻り自己同型による双対半標準基底の安定性を証明しています。しかし、「量子冪単胞体」の「量子捻り自己同型」については、Berenstein-Rupel によって導入されていたが、双対標準基底の安定性に関しては、一般的に予想とされていた。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、Geiss-Leclerc-Schröer による捻り自己同型による双対半標準基底の安定性を、双対標準基底に置き換えて捉え直し、捻り自己同型を量子化することで、量子捻り自己同型による双対標準基底の安定性を一般的に示すことでした。また、量子二重ブリュア胞体においても、双対標準基底および量子捻り自己同型を導入することで、Goodearl-Yakimov による量子クラスター代数構造を双対標準基底を用いて精密化および解明することを目指しました。

## 3. 研究の方法

本研究の方法は、まず量子冪単部分群と呼ばれる非可換環の局所化を導入し、Demazure 加群と呼ばれる量子群の表現およびその標準基底の理論に基づいて、量子冪単胞体における量子捻り自己同型を構成することにあります。特に、双対標準基底の局所化および局所化された双対標準基底の量子捻り自己同型に関する安定性を証明します。

また、一般化として、量子二重ブリュア胞体においても、Goodearl-Yakimov による量子クラスター代数構造の構成において重要な役割を果たした双対差積上に双対標準基底を導入し、その局所化として量子二重ブリュア胞体の双対標準基底を導入します。さらに、量子捻り自己同型を構成し、その安定性を調べます。

## 4. 研究成果

大矢浩徳氏との共同研究において、量子閉冪単胞体の局所化として定義される量子冪単胞体の場合に関して量子捻り自己同型を構成した。量子冪単部分群の局所化から量子閉冪単胞体の局所化へ、局所化された双対標準基底を保つ同型写像を構成した。また、Demazure 加群とその標準基底の性質をしらべることで、Joseph および Yakimov による量子冪単部分群との同型写像を再解釈し、二種類の局所化を同時に考え、その間の普遍性を用いることで、量子閉冪単胞体の局所化から量子冪単部分群の局所化への非自明な同型写像を構成した。また、構成から量子冪単胞体の局所化された双対標準基底を保つことを示した。特に、Berenstein-Rupel の構成において期待される性質をみたく自己同型を構成した。Berenstein-Rupel の構成との同定は大矢浩徳氏によってなされた。また、対称型の場合には、Geiss-Leclerc-Schroer による前射影多元環を用いた量子クラスター代数の加法的圏論化に関する結果を援用することで、量子クラスター単項式を保つことが証明された。論文は、として出版された。

上記の研究においては、非対称型の場合に、量子捻り自己同型が量子クラスター単項式とよばれる元を保つことの証明ができなかった。その点を改良するために、Fan Qin 氏および Qiaoling Wei 氏との共同研究において、捻り自己同型およびその量子化の枠組みを一般的に導入し、捻り自己同型が、クラスター単項式を保つことが証明された。特に極大緑列および赤化列とよばれる変異の列に関する捻り自己同型である Donaldson-Thomas 変換と呼ばれる自己同型に関する結果が得られた。一般的に導入された Donaldson-Thomas 変換は、量子冪単胞体の場合には、先述した量子捻り自己同型と同定された。論文は、として出版された。

量子二重 Bruhat 胞体の双対標準基底の定義については、技術的な定義は与えられるが、普遍的な定義が与えられておらず、未だ完成していない。

旗多様体における Schubert 胞体と反 Schubert 胞体の共通部分およびそれぞれの Zariski 閉包である

Schubert 多様体と反 Schubert 多様体を考える。特に、Schubert 多様体と反 Schubert 多様体の共通部分を Richardson 多様体といい、Schubert 胞体および反 Schubert 胞体の共通部分を Richardson 胞体もしくは開 Richardson 多様体といい、Richardson 胞体の座標環の量子化である量子座標環について研究を行った。双対標準基底の定義が明確な場合として、旗多様体の Schubert 胞体と反 Schubert 胞体の共通部分として定義される Richardson 胞体の研究に取り組んだ。中間的な対象として、Kazhdan-Lusztig 多様体とも呼ばれる Schubert 多様体と反 Schubert 胞体の共通部分や、反 Kazhdan-Lusztig 多様体と呼ぶべき反 Schubert 多様体と Schubert 胞体の共通部分についても、量子座標環を導入し、双対標準基底の構成を行った。特に、Richardson 胞体の量子座標環を Kazhdan-Lusztig 多様体の量子座標環の局所化および反 Kazhdan-Lusztig 多様体の量子座標環の局所化と表示することで、それらの間の局所化された双対標準基底を保つ同型を構成した。また、Richardson 胞体の座標環のもう一つの表示である双不変式環の局所化についても量子化を導入し、Kazhdan-Lusztig 多様体の量子座標環の局所化および反 Kazhdan-Lusztig 多様体の量子座標環の局所化との間の同型を構成し、これらの同型を組み合わせることで、Richardson 胞体の量子座標環における双対標準基底を保つ捻り自己同型を構成した。論文は、現在準備中である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Kimura Yoshiyuki, Osaka Metropolitan University, Japan, Qin Fan, Wei Qiaoling, Beijing Normal University, P.R. China, Capital Normal University, P.R. China	4. 巻 19
2. 論文標題 Twist Automorphisms and Poisson Structures	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 1-39
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2023.105	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Kimura Yoshiyuki	4. 巻 28
2. 論文標題 Introduction to Quiver Varieties	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Two Algebraic Byways from Differential Equations: Groebner Bases and Quivers. Algorithms and Computation in Mathematics	6. 最初と最後の頁 231 ~ 270
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-26454-3_7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kimura Yoshiyuki, Oya Hironori	4. 巻 -
2. 論文標題 Twist Automorphisms on Quantum Unipotent Cells and Dual Canonical Bases	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnz040	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kimura Yoshiyuki, Oya Hironori	4. 巻 First Online
2. 論文標題 Quantum Twist Maps and Dual Canonical Bases	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Algebras and Representation Theory	6. 最初と最後の頁 pp 1-16
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10468-017-9729-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 8件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 Yoshiyuki Kimura
2. 発表標題 Twist automorphisms and dual canonical bases
3. 学会等名 Conference on Algebraic Representation Theory (CART) 2023 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 木村 嘉之
2. 発表標題 Cluster twist automorphisms and compatible Poisson structures
3. 学会等名 京大表現論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 木村 嘉之
2. 発表標題 Cluster twist automorphisms and compatible Poisson structures
3. 学会等名 Trends in Cluster Algebras 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 木村 嘉之
2. 発表標題 Cluster twist automorphisms and compatible Poisson structures
3. 学会等名 Gauge Theory, Moduli Spaces and Representation Theory, Kyoto 2023 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yoshiyuki Kimura
2. 発表標題 Twist automorphisms on quantum unipotent cells and the dual canonical bases
3. 学会等名 Cluster algebras and representation theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshiyuki Kimura
2. 発表標題 Twist automorphisms on quantum unipotent cells and the dual canonical bases
3. 学会等名 Mathematical structures of integrable systems, its deepening and expansion (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshiyuki Kimura
2. 発表標題 Twist automorphisms on quantum unipotent cells and the dual canonical bases
3. 学会等名 上海交通大学におけるセミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshiyuki Kimura
2. 発表標題 Twist automorphisms on quantum unipotent cells and the dual canonical bases
3. 学会等名 首都師範大学 数学科学学院におけるセミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshiyuki Kimura
2. 発表標題 Twist automorphisms on quantum unipotent cells and the dual canonical bases
3. 学会等名 Algebraic Lie Theory and Representation Theory (ALReT) 2017
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yoshiyuki Kimura
2. 発表標題 Twist automorphisms on quantum unipotent cells and the dual canonical bases
3. 学会等名 Ring Theory and Representation Theory Seminar(Nagoya University)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Researchmap <a href="https://researchmap.jp/ysykmr/">https://researchmap.jp/ysykmr/</a>
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------