様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　 ６ 月 ３０ 日現在

機関番号：３２６５７
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2017～2019
課題番号：１７Ｋ１４１７０

研究課題名（和文）数論的非線型微分方程式とそのフロベニウス構造

研究課題名（英文）Arithmetic non-linear differential equations and Frobenius structure

研究代表者
宮谷　和尭（Miyatani, Kazuaki）

東京電機大学・未来科学部・助教

研究者番号：１０７１１１４５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,600,000円

研究成果の概要（和文）：微分方程式論と整数論の両方の側面を持つ分野であるp-進微分方程式論において進展が得られた．本研究では，超幾何微分方程式という数学のいろいろな分野に現れる重要な微分方程式を，p-進数の世界で考察している．その結果，p-進超幾何微分方程式のパラメーターがp-進Liouville数に関するある条件を満たすとき，これがoverholonomicityという一種のコホモロジー的な有限性を満たすことを発見した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
p-進微分方程式は，フロベニウス構造という整数論に由来する構造がある場合にはよい性質を満たすことが多いが，そうでない場合の挙動は難しく，特に overholonomic なp-進D-加群のクラスは具体例がほとんど知られていなかった．本研究では，このような具体例を体系的に構成しただけでなく，それが超幾何微分方程式という微分方程式的にも自然な対象から得られることを発見した点で意義深い．

研究成果の概要（英文）：We studied p-adic differential equations, which have a feature of arithmetics and a feature of differential equations. As a result, we found a new relationship between hypergeometric differential equations, which appears in many areas in mathematics, and p-adic numbers. Concretely speaking, we proved that p-adic hypergeometric equations are overholonomic under a certain condition about p-adic Liouville numbers. (The overholonomicity is a kind of cohomological finiteness condition.)

研究分野：数論幾何学

キーワード：数論幾何学　超幾何関数　p-進微分方程式

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

（１）p-進超幾何微分方程式

数学のさまざまな分野に自然に現れる重要な函数のひとつに, 超幾何函数がある. この函数は,「超幾何級数として表されること」「積分表示をもつこと」「超幾何微分方程式とよばれる線形方程式の解であること」といった重要な性質を併せ持っており, これが数学のさまざまな分野に現れるひとつの理由となっている. また, 超幾何微分方程式は一般の階数の線形微分方程式であるが, 実は 1 階の超幾何微分方程式を building block として, 乗法的畳み込みによって得られることが知られている.

超幾何函数は, 数論幾何学の観点からも重要である. たとえば, p-進コホモロジー論の魁である Dwork らは, 超幾何級数の p-進解析的な側面の研究にも多大な成果を残しており, また都築は特別な超幾何函数の p-進版について,「積分表示」に相当するコホモロジー的な表示を得ている. Katz は, 超幾何函数の l-進版（p-進版とは別の観点からの数論幾何化）について, これがやはり 1 階の超幾何函数の乗法的畳み込みとして得られることも証明している.

本研究課題の申請時, 研究代表者は超幾何微分方程式の数論幾何的（p-進的）側面について次のような研究を行っていた. これは, p-進超幾何微分方程式の p-進超幾何微分方程式についてはよく研究されていた. すなわち, 超幾何微分方程式に現れるパラメーターが全て有理数である場合, この定める数論的 D-加群には, フロベニウス構造とよばれる代数的整数論と相性のよい構造が入る. この構造により, 前述の Katz による l-進版ともある意味で両立することが分かっていた. なお, 前段落に述べた, 都築による「積分表示」もフロベニウス構造をもつ場合のひとつである.

フロベニウス構造を持たないような数論的 D-加群については, Caro の過ホロノミック性の理論などの研究が知られていた. これは緻密で大きな一般論であるが, 特にフロベニウス構造を持たない p-進微分方程式でこの定式化の範疇に入るような具体例は簡単なものを除いてあまり知られていなかった.

（２）非線形 p-進微分方程式

非線形微分方程式の整数論的な側面の研究もなされていたが, フロベニウス構造という概念が確立されていないなど, 線形微分方程式に比べて整数論との直接的な関わりの研究はいまだ少ないと言ってよかった. しかしながら, パンルヴェ方程式の p-進化の考察が不完全周期積分の観点から Yui, Manin の両氏によって始められているなど, 重要な研究対象であるべきことは間違いないように思われる. また, このパンルヴェ方程式は, 古典的には 2 階線形微分方程式（のうち, 超幾何関数の次にアクセサリーパラメーターが少ないもの）のモノドロミー保存条件から得られるものであるなど, 線形微分方程式を出発点として調べることが可能であることが期待できる状況であった.

２．研究の目的

非線形微分方程式の p-進的側面, 特にフロベニウス構造にまつわる研究をすすめる. 具体的には, 次のような研究を行う.

（１）p-進非線形微分方程式の形式解の収束半径および, その方程式のフロベニウス的な構造の有無との関係を調べる.

（２）p-進非線形微分方程式には, 前述のように, ある意味で線形微分方程式から得られるものもある. そのため, 線形微分方程式, なかでも超幾何微分方程式や, 2 階でアクセサリーパラメーターが 2 個であるようなものについて, そのフロベニウス構造の有無による挙動のよさを調べる.

３．研究の方法

主に 2 種類のアプローチで研究をおこなった.

１つ目は, p-進非線形微分方程式のうち比較的簡単な形のものに注目し, その形式解の「過収束性」を調べることである.

２つ目は, 上述の観点からまずは線形微分方程式に着目し, 中でもフロベニウスを持たないような具体的な p-進微分方程式のよい性質を確立することである.

また, これらに加えて, アプローチをより多角的におこない, またより先進的な結果を取り入れて研究を進めるべく, 勉強会や研究集会で聴講・講演を行い, 国内外の研究者との議論・討論を行いつつ研究を進めた.

４．研究成果

本研究では，フロベニウス構造を必ずしも持たない場合の超幾何微分方程式の性質に関して，次のような成果が得られた．

(1) 数論的超幾何 D-加群と乗法的畳み込み

「研究開始当初の背景」で簡単に触れたように，古典的な，および l-進的な超幾何微分方程式（D-加群）については，次のような事実が知られていた．すなわち，このような D-加群は 1 階の超幾何 D-加群から乗法的畳み込みとして得られるという事実である．（正確には，upper parameters と lower parameters との間に整数差がないという条件が必要である．以下，この条件については言及しないが同様である．）また，研究代表者自身による研究で，p-進版についても，パラメーターが有理数であれば同じことが成立することが分かっていた．

研究代表者は本研究において，パラメーターが有理数とは限らない p-進超幾何 D-加群についても，upper parameters と lower parameters との差に p-進リュービル数が現れないという仮定のもとで，やはり 1 階の p-進超幾何 D-加群の乗法的畳み込みとして得られることを証明した．なお，実際には，この「差に p-進リュービル数が現れない」という条件よりも弱い仮定のもとで証明できているが，いずれにしても p-進リュービル数に関する条件が必要となっている．

この結果は，形式的には，パラメーターが有理数の場合を扱った前研究の直接的な一般化であるが，証明に要する技術の面で，有理数の場合よりも繊細な議論が必要となっている．また，この結果から得られる次の研究成果において，その意義が大きく前進している．

(2) 数論的超幾何 D-加群の過ホロノミック性

数論的超幾何 D-加群に対し，その upper parameters と lower parameters の生成する Zp/Z の部分群をΣと書き，このΣに p-進リュービル数が現れないと仮定する．（これは(1)における「差に p-進リュービル数が現れない」という仮定よりもかなり強く見えるが，たとえばパラメーターが全て代数的数であれば必ず成立する．）このとき，本研究によって，この数論的超幾何 D-加群が過ホロノミック性(overholonomicity)を持つことが明らかになった．過ホロノミック性とは，数論的 D-加群のホロノミーの研究の過程で Caro によって導入された，ある種のコホモロジー的有限性条件である．

数論的超幾何 D-加群は (1) によって 1 階の数論的超幾何 D-加群を building block とする乗法的畳み込みとして表される．また，この building block となる数論的 D-加群が過ホロノミックであることは容易に分かる．しかし，過ホロノミック性は，フロベニウス構造がない場合は Grothendieck の 6 つの函手で保たれない（テンソル積で保たれない）ため，乗法的畳み込みでも保たれず，従って実は (1) の結果だけではこの結果を得ることはできなかった．本研究では，building block が単に過ホロノミックなだけでなくΣ-unipotent であることに注目し，またこのΣ-unipotence が 6 つの函手で保たれるという Caro の結果を援用し，この障害を乗り越えることができた．

この結果は，従来の研究で扱われていたパラメーターが有理数である場合とは意義が異なる．従来の結果はフロベニウス構造がある場合の研究であり，ある意味で数論的に性質がよいことが期待されるものだと言える．一方で，本研究はそのようなフロベニウス構造がない，いわば p-進特有の場合を扱っており，この場合でも超幾何微分方程式が良い性質を持つことはたいへん非自明である．また，フロベニウス構造がない overholonomic な数論的 D-加群の例は簡単なものを除いてあまり知られておらず，超幾何微分方程式のような古典的な対象がこのような例を与えていることは，p-進微分方程式論に新たな知見をもたらしたといえる．

本研究の研究期間において，上記のように p-進超幾何微分方程式のフロベニウス構造の有無に根本的に関わる進展が得られた．これは非線形微分方程式を理解するためのステップであると言える一方で，p-進非線形微分方程式そのものの研究は想定よりも困難なものであり，その多くは今後の課題として残されている．

本研究で得られた成果についてはプレプリントとして既に発表し，査読つきの雑誌に投稿中である．また，それとともに，国内研究会・国際研究会において研究代表者による発表をおこなっている．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計5件（うち招待講演　5件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 宮谷和尭
２．発表標題 p-進超幾何微分方程式とp-進 Liouville 数
３．学会等名 代数学シンポジウム2018（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Kazuaki Miyatani
２．発表標題 p-adic hypergeometric D-modules and multiplicative convolution
３．学会等名 p-adic cohomology and arithmetic geometry 2018（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Kazuaki Miyatani
２．発表標題 p-adic hypergeometric D-modules and multiplicative convolution
３．学会等名 The 11th Conference on Arithmetic and Algebraic Geometry（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 宮谷和尭
２．発表標題 有限体上の超幾何函数とp-進超幾何微分方程式
３．学会等名 北海道特殊関数セミナー（招待講演）
４．発表年 2017年

１．発表者名 宮谷和尭
２．発表標題 p-進超幾何微分方程式のフロベニウス構造
３．学会等名 京都大学代数幾何学セミナー（招待講演）
４．発表年 2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Kazuaki Miyatani https://math.miyatani.org/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考