

令和 4 年 6 月 7 日現在

機関番号：24402

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K14171

研究課題名（和文）同変玉河数予想と高階岩澤理論の研究

研究課題名（英文）Research on the equivariant Tamagawa number conjecture and higher rank Iwasawa theory

研究代表者

佐野 昂迪 (Sano, Takamichi)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：30794698

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：高階オイラー・コリヴァギン系の理論の構築に成功し、それを用いて高階岩澤主予想を部分的に解決した。また、一般のモチーフに対する岩澤主予想を定式化し、それを用いて玉河数予想を解く戦略を与えた。さらに、楕円曲線の場合に加藤のオイラー系を詳しく考察し、Mazur-Tate予想を部分的に解決し、Birch-Swinnerton-Dyer予想を解く自然な戦略を与えた。Heegner点のオイラー系に対しても類似の結果を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

高階オイラー・コリヴァギン系の理論を構築し、Mazur-Rubin予想を解決した。これは新しい理論を作り上げた点と、未解決予想を解決したという点で学術的意義がある。さらに、Mazur-Tate-Teitelbaum予想やMazur-Tate予想といった予想を一般のモチーフに対する一つの予想から導き、別個の現象を一つの現象から統一的に解釈したという点で意義がある。

研究成果の概要（英文）：We succeeded in establishing the theory of Euler-Kolyvagin systems and gave a partial solution to higher rank Iwasawa main conjectures as an application of our theory. Furthermore, we formulated an Iwasawa main conjecture for a general motive and gave a strategy for solving the Tamagawa number conjecture. We particularly studied Kato's Euler system for elliptic curves in detail and gave a partial solution to the Mazur-Tate conjecture. We also gave a natural strategy for solving the Birch-Swinnerton-Dyer conjecture. Lastly, we gave analogous results for the Heegner point Euler system.

研究分野：数論

キーワード：オイラー系 岩澤主予想 玉河数予想 楕円曲線

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) Mazur と Rubin は高階 Kolyvagin 系の理論を構築し、高階 Euler 系から高階 Kolyvagin 系を作る自然な方法が存在することを予想していた。彼らの理論は、高階 Kolyvagin 系を用いて高階岩澤主予想を解くことができることを示唆していた。しかしながら、彼らが解決しようとしていた問題の大部分は未解決であり、また、一般のモチーフに対する高階岩澤主予想の定式化さえもはっきりしていなかった。

(2) Mazur と Rubin と私は独立に、乗法群の場合の高階 Euler 系である Rubin-Stark 元の微分に関する公式を予想として定式化していたが(いわゆる「MRS 予想」)、これの楕円曲線に対する類似、さらに一般のモチーフに対する類似ははっきりとした形で定式化されていなかった。Burns, 栗原と私は、MRS 予想を用いて乗法群の場合の(同変)玉河数予想を解くための戦略を立てたが、これの楕円曲線版、一般のモチーフ版も成し遂げることができると期待していた。

(3) 以上の研究の非可換版も成し遂げることができると期待していた。

2. 研究の目的

(1) 高階 Euler-Kolyvagin 系の理論を構築し、一般のモチーフに対する高階岩澤主予想を部分的に解決することを目的とした。

(2) 楕円曲線の加藤の Euler 系に対する MRS 予想の類似を定式化し、Mazur-Tate 予想といった予想との関係を調べ、玉河数予想(この場合は Birch-Swinnerton-Dyer 予想)を解くための戦略を立てることを目的とした。また、これの一般のモチーフ版も成し遂げることにも目的とした。

(3) 以上の研究を非可換の設定でも考察することを目的とした。

3. 研究の方法

(1) David Burns 氏 (King ' s College London) と坂本龍太郎氏 (筑波大学) との共同研究で、高階 Euler-Kolyvagin 系の理論を構築した。私は高階 Euler 系の正しい定義を与えることと、高階 Euler 系から高階 Kolyvagin 系を作ることについて研究を行い、成し遂げることができた。坂本氏は高階 Kolyvagin 系の加群と高階 Stark 系の加群が同型であることを示し、私の研究と合わせることで、高階 Euler-Kolyvagin 系の理論を満足する形で作り上げた。この理論は Mazur-Rubin による高階 Kolyvagin 系の理論をより一般の係数環の場合に一般化したことにもなっている。Burns 氏は研究統括や、同変玉河数予想との関係の考察を行なった。また、片岡武典氏 (慶應義塾大学) との共同研究で、一般のモチーフに対する高階岩澤主予想を、Burns-Sakamoto-Sano の理論を応用することで部分的に解決した。

(2) Burns 氏と栗原将人氏 (慶應義塾大学) との共同研究で、楕円曲線の加藤の Euler 系に対する MRS 予想の類似を深く考察した。私が基本的なアイデアを考え、Burns 氏と栗原氏から助言を受けつつ、理論を構築していった。

(3) Burns 氏との共同研究で、非可換 Euler 系の理論を構築した。基本的なアイデアは Burns 氏が提示し、私が詳細をチェックし、ギャップや間違いを指摘するなどして研究を進めた。

4. 研究成果

(1) Burns 氏と坂本氏との共同研究で、高階 Euler-Kolyvagin 系の理論を満足のいく形で構築することに成功した。これにより Mazur-Rubin の予想を完全解決した。高階 Euler-Kolyvagin 系の理論が作られるべきだという考え方は 1990 年代後半に Perrin-Riou によって提唱されていたが、その後ほぼ全く進展がなかった。我々はこの問題に終止符を打ったと言え、インパクトは大きい。また、この理論の応用として、加藤の Euler 系に関する新しい結果や、Rubin-Stark 元に関する MRS 予想の大幅な解決なども与えた。さらに、片岡氏との共同研究で、一般のモチーフに対する高階岩澤主予想を定式化し、この予想を部分的に解決することに成功した。また、この一般論を Heegner 点の設定で適用することで、Heegner 点と関係する階数 2 の Euler 系の構成や、Perrin-Riou による Heegner 点の岩澤主予想が我々の一般的な岩澤主予想とこの場合に同値であること

を示すこともできた。Heegner 点を階数 2 の Euler 系ととらえるこの新しい考え方は今後重要になってくると思われ、Bertolini-Darmon による Heegner 点に関する一連の研究と関係する多くの研究成果が今後得られると期待される。

(2) Burns 氏と栗原氏との共同研究で、楕円曲線の加藤の Euler 系に関する新しい予想を定式化することに成功し、それが階数 1 の場合には Perrin-Riou 予想と同値であることや、Mazur-Tate-Teitelbaum の p 進 Birch-Swinnerton-Dyer 予想がその予想から導かれることなどを示すことができた。さらに、この予想と岩澤主予想を用いて Birch-Swinnerton-Dyer 予想を解くための自然な戦略も立てることができた。これは乗法群の場合に Burns 氏と栗原氏との共同研究で行った Rubin-Stark 元に関する MRS 予想の研究の自然な類似であったが、Perrin-Riou 予想や Mazur-Tate-Teitelbaum 予想との関係は当初予想していなかった面白い発見であった。また、この考え方をさらにおし進めることで、我々の予想から Mazur-Tate 予想が導かれることも示し、このことにより Mazur-Tate 予想を階数 1 の場合に弱い仮定の下で解決することに成功した。Mazur-Tate 予想は 1980 年代に提出された予想であり、零点の位数に関する弱 Mazur-Tate 予想に関しては多くの研究結果があったものの、我々が部分的に解決した強 Mazur-Tate 予想に関してはそれまでほぼ全く結果がなかった。我々は初めて強 Mazur-Tate 予想の強い証拠を与えたことになる。

(3) Burns 氏との共同研究で、非可換 Euler 系の理論を構築することに成功した。この理論は、非可換環上の外積代数、非可換高次 Fitting イデアルの導入、非可換決定関手の具体的構成など、非可換代数の基礎を作り上げたことが土台になっている。この理論の応用として、円単数の Euler 系を延長する非可換 Euler 系の存在を示した。これは非可換 Euler 系に関する初めての具体的な成果であり、今後、非可換岩澤理論や同変玉河数予想への応用など様々な関連する研究成果が得られることが期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 David Burns, Masato Kurihara, Takamichi Sano	4. 巻 86
2. 論文標題 On Stark elements of arbitrary weight and their p-adic families	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 113-140
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/aspm/08610113	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 David Burns, Takamichi Sano	4. 巻 2021
2. 論文標題 On the Theory of Higher Rank Euler, Kolyvagin and Stark Systems	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 10118 ~ 10206
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnz103	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 David Burns, Takamichi Sano, Kwok-Wing Tsoi	4. 巻 2021
2. 論文標題 On Higher Special Elements of p-adic Representations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 15337 ~ 15411
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnz378	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 David Burns, Masato Kurihara, Takamichi Sano	4. 巻 11
2. 論文標題 On Iwasawa theory, zeta elements for G_m , and the equivariant Tamagawa number conjecture	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Algebra & Number Theory	6. 最初と最後の頁 1527 ~ 1571
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/ant.2017.11.1527	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 David Burns, Alexandre Daoud, Takamichi Sano, Soogil Seo	4. 巻 -
2. 論文標題 On Euler systems for the multiplicative group over general number fields	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Publicacions Matematiques	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 9件)

1. 発表者名 佐野昂迪
2. 発表標題 同変玉河数予想について
3. 学会等名 京都大学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takamichi Sano
2. 発表標題 On a new conjecture on Kato's zeta elements
3. 学会等名 Oberseminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takamichi Sano
2. 発表標題 On a generalization of Perrin-Riou's conjecture on Kato's zeta elements
3. 学会等名 Recent advances in the arithmetic of Galois representations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takamichi Sano
2. 発表標題 Tamagawa Number Conjecture and Iwasawa Theory
3. 学会等名 Algebra and Number Theory Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takamichi Sano
2. 発表標題 On functional equations of Euler systems
3. 学会等名 Number Theory Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takamichi Sano
2. 発表標題 On the local Tamagawa number conjecture and functional equations of Euler systems
3. 学会等名 KAH-INI Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takamichi Sano
2. 発表標題 On a generalization of Perrin-Riou's conjecture on Kato's zeta elements
3. 学会等名 Number Theory Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 佐野昂迪
2. 発表標題 Euler系の理論の最近の発展について
3. 学会等名 第62回代数学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takamichi Sano
2. 発表標題 Generalized Stark elements and p-adic L-functions
3. 学会等名 Workshop on p-adic L-functions and algebraic cycles (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takamichi Sano
2. 発表標題 Recent developments on Stark-type conjectures
3. 学会等名 Algebraic Number Theory and Related Topics 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takamichi Sano
2. 発表標題 On derivatives of Kato's Euler system and the Mazur-Tate Conjecture
3. 学会等名 Number Theory Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Research
<https://sites.google.com/site/takamichisanomath/home/research>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
英国	King's College London			
中国	National Taiwan University			
韓国	Yonsei University			