

令和 4 年 6 月 3 日現在

機関番号：17102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K14174

研究課題名(和文) 浅井L関数の岩澤理論的研究

研究課題名(英文) Iwasawa theory for Asai L-functions

研究代表者

並川 健一 (Namikawa, Kenichi)

九州大学・数理学研究院・助教

研究者番号：10757066

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：浅井表現、およびRankin-Selberg積に対する周期積分について明示的な研究を行った。とくに $GSp(4)$ 上のテータ関数を具体的に構成し、そのBessel周期や内積公式を与え、浅井表現の岩澤理論に対する保型表現を用いた手法の基礎的な部分を明らかにした。また基礎体がCM体の場合に $GL(2)$ の浅井L関数の $p$ -進版を構成した。さらに浅井L関数の類似を考察し、Rankin-Selberg積のL関数の周期積分の公式を導き、保型表現に対応するモチーフの存在予想などの標準的な予想の下で、 $GL(n)$ のWhittaker周期とモチーフ論的な周期の関係についても書き下した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

保型形式に関する周期積分の研究は、L関数の特殊値の研究において基本的である。本研究により、特殊値の数論的性質を調べるために周期積分の明示的な公式をいくつか得ることが出来た。これらはとくに浅井表現、Rankin-Selberg積のL関数に関する今後の岩澤理論的な研究にとっての基礎となっており、今後のこの方面への研究の発展が期待される。また本研究の手法を他の表現、代数群に対して適用することも興味深い。

研究成果の概要(英文)：We studied about period integrals for Asai representations and Rankin-Selberg products in an explicit manner. In particular, we constructed theta series on  $GSp(4)$  and we proved the Bessel period formulas and inner product formulas for these theta series, which give fundamental properties for modular Iwasawa theory for Asai representations. We also constructed  $p$ -adic Asai L-functions for  $GL(2)$  if the base field is a CM field. Furthermore, considering an analogue of Asai representations, we proved an explicit period integral formulas for Rankin-Selberg L-functions and we clarify a motivic background of Whittaker periods for  $GL(n)$  under standard conjectures such as an existence of motives corresponding automorphic representations.

研究分野：数論

キーワード：岩澤理論 L関数 保型表現論  $p$ -進L関数

### 1. 研究開始当初の背景

Mazur-Wiles による岩澤主予想の証明では、 $GL(2)$  の Eisenstein 級数と尖点的保型形式との合同の構成が用いられていた。この手法は Skinner-Urban により  $U(2,2)$  の場合にその高次元化が研究され、さらに彼らの結果の他にも低い次元の場合には同様の結果も現れ始めている状況であった。この手法による岩澤主予想の片側の包含関係の証明の要点は、Eisenstein 級数およびその  $p$  進族の明示的構成、その Fourier 係数・定数項の計算および尖点形式との合同であった。同様の考察を高次の代数群の場合にテータ級数に対して行った研究はまだ見られず、岩澤理論的な興味だけでなく、テータリフトの明示的構成、周期積分の明示的公式や  $p$  進  $L$  関数の構成など保型表現論的な研究としても興味深い現象が未解明な状況であった。

### 2. 研究の目的

本研究では  $GSp(4)$  でのテータ級数と尖点的保型形式の合同の構成の応用として、岩澤主予想の片側の包含関係の証明を目的とした。これは肥田-Tilouine の反円分的岩澤主予想の高次元化と見做すことが出来、浅井表現と呼ばれるある種の 4 次元 Galois 表現に対する岩澤主予想の研究に相当する。浅井表現に対しては、岩澤主予想の定式化に現れる  $p$  進  $L$  関数の構成も行われていなかったため、この構成についても研究目的として定めた。

以前の研究で試験関数の選択を終えていたので、適切なテータ級数の候補はすでに得られていた。そのため本研究ではこのテータ級数に対する周期積分の計算を明示的に実行することが目的となる。また  $p$  進  $L$  関数の構成についても同様に周期積分を調べる必要があり、とくに周期積分の代数性・整性を定める周期についても状況を整理することを研究目的とした。

### 3. 研究の方法

合同の構成、および  $p$  進  $L$  関数の構成、共にある種の周期積分を明示的に調べる必要があった。そのため本研究では、周期積分を定める試験関数を適切に定め、所望の性質を満たす Theta 関数や、周期積分の  $p$  進族の具体的な構成方法を考察した。また特殊値の代数性の定義に用いられる周期を研究するため、周期積分のコホモロジー解釈についても詳細に調べた。

### 4. 研究成果

浅井表現は、基礎体が二次体の絶対 Galois 群の表現の捻りテンソル積表現として定義される。そのため研究の指針として、実二次体の場合と虚二次体の場合に分けて考察を行った。また有理数体上の絶対 Galois 群の表現の組に対し、テンソル積をとることは、浅井表現の類似と見做すことも出来、これも併せて考察をしていくこととした。この浅井表現に関して、 $GSp(4)$  上のテータ級数の周期積分、 $L$  関数について以下の成果を得た。また浅井表現の周期積分の類似として、Rankin-Selberg  $L$  関数についての研究結果も得た。

(1) Inner product formula for Yoshida lifts (with Ming-Lun Hsieh), *Ann. Math. Quebec*, 42, (2018), 215-253.

表現の組の場合、または基礎体が実二次体の場合に、対応する  $GSp(4)$  の Theta 関数は吉田リフトと呼ばれ、前者の場合に I 型、後者の場合に II 型と呼ぶこととした。吉田リフトを与える適切な試験関数の構成はそれ以前の研究で与えていたので、論文では、この吉田リフトに対し、内積公式を浅井  $L$  関数の特殊値を用いて明示的に与えることで、吉田リフトが非自明なテータ関数の構成方法であることを示した。吉田リフトがスカラー値関数として定式化される場合には、この内積公式は Agarwal-Klosin による先行研究では予想とされていた。内積公式と Agarwal-Klosin の先行研究と合わせることで、強い仮定のもと、I 型の場合には Theta 関数と尖点的保型形式との合同が得られたこととなる。

(2) Explicit inner product formulas and Bessel period formulas for HST lifts, *Kyoto J. Math.* 62, (2022), 231-311.

基礎体が虚二次体の場合に対応する  $GSp(4)$  の Theta 関数は、Harris-Soudry-Taylor による研究がよく知られていた。これを HST リフトと呼び、本研究ではこの HST リフトについて明示的な考察を行った。論文では、HST リフトの Fourier 係数と  $GL(2)$  の標準  $L$  関数の中心値との間の明示的な関係式、および HST リフトの内積公式を吉田リフトの場合と同様に浅井  $L$  関数の特殊値で与えた。とくに試験関数の適切な正規化のもとで、ある類の Fourier 係数が整性を持ち、Fourier 係数の  $p$  進的な非自明性が標準  $L$  関数の中心値の  $p$  進的な非自明性と同値であること、かつその内積が浅井  $L$  関数の特殊値の代数部分で書けることを示した。

(3) A construction of  $p$ -adic Asai  $L$ -functions (to appear in *Manuscripta Mathematica*).

この論文では、上記の内積公式の研究で現れた浅井  $L$  関数に対し、とくに基礎体が CM 体の場合に、その  $p$  進版 ( $p$  進  $L$  関数) の構成を行った。構成では Siegel 単数から定まる有理数体上の

GL(2)の Eisenstein 級数の総実体上での類似を考察し，周期積分の  $p$  進族の明示的な構成を行った．ただし基礎体が虚二次体の場合の先行研究である Loeffler-Williams の結果と比較すると，総実体の場合には横方向の合同に相当する Kummer 合同式については解明することが出来なかった．これは Eisenstein コホモロジー類の分母の振る舞いに起因しており，今後の研究課題として残ることとなった．

(4) A cohomological interpretation of Archimedean zeta integrals for  $GL_3 \times GL_2$  (with Takashi Hara), *Research in Number Theory*, 7, Article Number: 68 (2021).

$p$  進浅井 L 関数の構成を行う際，いくつかの点で  $GL(n+1) \times GL(n)$  の Rankin-Selberg L 関数の  $p$  進版の構成との類似を参考としていた．逆に浅井 L 関数では証明されている性質が，Rankin-Selberg L 関数の方では不明であるような性質もいくつか見られたため，これらの性質について詳細に調べることにした．論文では，とくに  $GL(3) \times GL(2)$  の場合に Eichler-志村同型を明示的に書き下し，これを用いて Rankin-Selberg L 関数の特殊値をカップ積による像として捉える明示的な公式を得た．これにより無限素点での局所積分の明示公式，および臨界点に依らない臨界値の代数性がそれぞれ証明され，これらの観点について先行研究の結果を改善している．とくに  $p$  進浅井 L 関数の場合と同様に  $p$  進 Rankin-Selberg L 関数についても不明瞭であった Kummer 合同式についてもその定式化を与えることが出来た．

(5) (4)の研究に引き続いて  $GL(n+1) \times GL(n)$  の Rankin-Selberg L 関数について調べた．とくに周期に関するいくつかの標準的な予想の下で，周期のモチーフ論的背景を明らかにすることが出来た．また基礎体が総虚の場合には，特殊値の整性についても定式化出来ることを示した．これらの結果についてはそれぞれ論文を準備中の段階である．

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 5件／うち国際共著 1件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Namikawa Kenichi	4. 巻 -
2. 論文標題 A construction of p-adic Asai L-functions for $GL_2$ over CM fields	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 manuscripta mathematica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00229-021-01341-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hara Takashi, Namikawa Kenichi	4. 巻 7
2. 論文標題 A cohomological interpretation of archimedean zeta integrals for $GL_3 \times GL_2$	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Research in Number Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40993-021-00294-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 並川健一	4. 巻 -
2. 論文標題 保型形式の明示的構成とその岩澤理論への応用	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 日本数学会2020年度年会アブストラクト集	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Namikawa Kenichi	4. 巻 62
2. 論文標題 Explicit inner product formulas and Bessel period formulas for HST lifts	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 231-311
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/21562261-2022-0004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 並川健一	4. 巻 -
2. 論文標題 p進L関数とその周辺	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 第64回代数学シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 51-64
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Namikawa Kenichi	4. 巻 153
2. 論文標題 On p-adic L-function associated with cusp forms on $GL_2$	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 manuscripta mathematica	6. 最初と最後の頁 563-622
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00229-016-0904-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hsieh Ming-Lun, Namikawa Kenichi	4. 巻 42
2. 論文標題 Inner product formula for Yoshida lifts	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Annales mathematiques du Quebec	6. 最初と最後の頁 215 ~ 253
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40316-017-0088-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 並川健一	4. 巻 -
2. 論文標題 GSp(4)上のテータ関数の構成とその応用	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 早稲田大学整数論研究集会2017報告集	6. 最初と最後の頁 9-17
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計17件（うち招待講演 16件 / うち国際学会 6件）

1. 発表者名 並川健一
2. 発表標題 GL(n+1) × GL(n)のRankin-Selberg L関数の周期
3. 学会等名 九州大学代数学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 並川健一
2. 発表標題 Eisenstein級数の明示的構成とその定数項
3. 学会等名 Dasgupta-Kakdeの最近の仕事とその周辺Workshop（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 並川健一
2. 発表標題 モジュラー曲線と保型形式
3. 学会等名 2021年製数論サマースクール「モジュラー曲線と数論」（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kenichi Namikawa
2. 発表標題 A cohomological interpretation of the period integrals for GL(3) × GL(2)
3. 学会等名 RIMS conference “Automorphic forms, Automorphic representations, Galois representations, and its related topics”（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 並川健一
2. 発表標題 保型形式の明示的構成とその岩澤理論への応用
3. 学会等名 日本数学会2020年度会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kenichi Namikawa
2. 発表標題 A construction of p-adic Asai L-functions and related topics
3. 学会等名 Analytic, geometric and p-adic aspects of automorphic forms and L-functions（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kenichi Namikawa
2. 発表標題 A construction of p-adic Asai L-functions and related topics
3. 学会等名 Workshop on the congruence ideals and p-adic L-functions（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 並川健一
2. 発表標題 浅井表現の岩澤理論の最近の進展について
3. 学会等名 代数的整数論とその周辺 2019（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenichi Namikawa
2. 発表標題 Recent developments on Iwasawa theory for Asai representations I, II
3. 学会等名 CMC special weeks on number theory, Korea Institute for Advanced Study (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 並川健一
2. 発表標題 p進浅井L関数の構成
3. 学会等名 2019 大分佐賀整数論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenichi Namikawa
2. 発表標題 A construction of p-adic Asai L-functions
3. 学会等名 Regulator in Niseko 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 並川健一
2. 発表標題 p進浅井L関数とその周辺
3. 学会等名 第64回代数数学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 並川健一
2. 発表標題 p進浅井L関数の構成
3. 学会等名 早稲田大学整数論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 並川健一
2. 発表標題 浅井表現の岩澤理論
3. 学会等名 第140回日本数学会九州支部例会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenichi Namikawa
2. 発表標題 A construction of p-adic Asai L-functions
3. 学会等名 Mini workshop at Osaka university (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 並川健一
2. 発表標題 浅井L関数の特殊値の研究
3. 学会等名 九州大学代数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kenichi Namikawa
2. 発表標題 p-adic L-function for $GL(n+1) \times GL(n)$ I
3. 学会等名 Special values of automorphic L-functions and associated p-adic L-functions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関