

令和 4 年 6 月 17 日現在

機関番号：22301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K14175

研究課題名（和文）有限次元多元環のホッホシルトコホモロジーのBV-構造についての研究

研究課題名（英文）Study on BV-structure of Hochschild cohomology of finite dimensional algebras

研究代表者

板垣 智洋 (Tomohiro, Itagaki)

高崎経済大学・経済学部・准教授

研究者番号：80756487

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、中山自己同型が対角化可能な自己入射的中山多元環のホッホシルトコホモロジー上のBatalin-Vilkovisky代数構造を計算した。また、ホッホシルト拡大環が対称的多元環となるための十分条件を2-cocycleに関して与えた。そのほか、共同研究によりBatalin-Vilkovisky代数構造やホッホシルト拡大環に関するいくつかの結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ホッホシルトコホモロジーは導来同値の不変量であり、豊富な代数的な構造をもっている。Gerstenhaberブラケットに関するBatalin-Vilkovisky代数構造はその一つであるが、具体計算例は多くはない。本研究では、具体計算例として中山自己同型が対角化可能な自己入射的中山多元環についての結果を得ることで、これに貢献したと考える。また、いくつかの共同研究による結果についてはBatalin-Vilkovisky代数構造の存在性やフロベニウス多元環の研究に貢献したと考える。

研究成果の概要（英文）：In this research, we calculate Batalin-Vilkovisky algebra structure of Hochschild cohomology of selfinjective Nakayama algebras with a Nakayama automorphism diagonalizable. Moreover, we give a sufficient condition, related to 2-cocycles, for Hochschild extension algebras to be symmetric. Furthermore, we obtain several results for Batalin-Vilkovisky algebra structure and Hochschild extension algebras as collaborations.

研究分野：代数学

キーワード：ホッホシルトコホモロジー BV structure 多元環の表現論

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

多元環のホッホシルトコホモロジーは導来同値の不変量の一つであり、豊富な代数的な構造をもっている。多元環のホッホシルトコホモロジーの加群構造や環構造などの代数的な構造の情報を得ることは一般には難しく、1990年代以降は K.Erdmann、T.Holm 他多数により有限表現型の有限次元自己入射的多元環の導来同値分類に関わる自己入射的中山多元環をはじめ、数多くの多元環のクラスのホッホシルトコホモロジーの代数的構造を決定する研究が続いている。

一方、T.Tradler によって対称多元環のホッホシルトコホモロジー上に Gerstenhaber ブラケットに關係する Batalin-Vilkovisky operator をもつことが発見されて以降、最近ではフロベニウス多元環などの多元環のクラスに対して Batalin-Vilkovisky 代数構造についての研究が行われている。対称多元環についてはホッホシルトコホモロジー上の Batalin-Vilkovisky 代数構造は導来同値の不変量であり、重要な不変量の一つであることが示されている。一般には、ホッホシルトコホモロジーの代数的構造を決定することが困難であるので、Batalin-Vilkovisky 代数構造の具体計算例を与えることはさらに難しく、具体計算例も多くはない。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、ホッホシルトコホモロジー上の Batalin-Vilkovisky 代数構造の存在とその具体的な構造を明らかにすることである。特に、中山自己同型が対角化可能であるフロベニウス多元環について、そのホッホシルトコホモロジー上の Batalin-Vilkovisky 代数構造の具体計算例を与えること、中山自己準同型が対角化可能でないものについては Batalin-Vilkovisky 代数構造の存在を解明することを目的としている。自己入射的中山多元環については Batalin-Vilkovisky operator の計算手法の開発も行う。

### 3. 研究の方法

対称多元環や中山自己同型が対角化可能であるフロベニウス多元環については、ホッホシルトコホモロジー上の Batalin-Vilkovisky 代数構造の存在が保証されているので、自己入射的中山多元環について具体計算例を与える。ホッホシルトコホモロジー上の Gerstenhaber ブラケットや Batalin-Vilkovisky 代数構造についてはホッホシルト複体上で定義されているため、両側射影分解と bar resolution の間の複体の準同型を構成することによって Batalin-Vilkovisky operator の具体計算を行う。具体計算例を与える多元環のクラスとしてはまずは自己入射的中山多元環を考える。具体計算例を通して新しい計算手法や Batalin-Vilkovisky 代数構造の存在を調べる。

### 4. 研究成果

研究期間内(2017年度から2021年度まで)の研究によってホッホシルトコホモロジー上の Batalin-Vilkovisky 代数構造や自己入射的多元環に関する以下のような結果が得られた。これらの結果は日本数学会や環論シンポジウムなどで発表した。また、研究期間終了時では、投稿準備中のものを除き論文として掲載された。

#### (1) 自己入射的中山多元環のホッホシルトコホモロジー上の Batalin-Vilkovisky 代数構造

当初の目的である中山自己同型が対角化可能である自己入射的中山多元環について、そのホッホシルトコホモロジーの Batalin-Vilkovisky 代数構造を決定した。さらに、中山自己同型が対角化可能でない場合は中山自己同型によるホッホシルト複体上のコホモロジー上の Batalin-Vilkovisky 代数構造の具体計算を行った。

#### (2) 多項式増大型の自己入射的多元環のホッホシルトコホモロジー上の Batalin-Vilkovisky 代数構造

共同研究により、多項式増大型の自己入射的多元環のあるクラスに対して、ホッホシルトコホモロジーの加群構造、環構造、Gerstenhaber ブラケット、Batalin-Vilkovisky operator の計算を行った。

#### (3) 完備ホッホシルトコホモロジーの Batalin-Vilkovisky 代数構造

共同研究により、中山自己同型が対角化可能であるフロベニウス多元環の完備ホッホシルトコホモロジーの Batalin-Vilkovisky 代数構造の存在を示し、対称多元環に関する結果を中山自己同型が対角化可能なフロベニウス多元環に関する結果へ拡張することに成功した。

#### (4) Quadratic monomial algebra のホッホシルトコホモロジー

共同研究により quadratic monomial algebra のあるクラス  $N_m$  のホッホシルトコホモロジー環および Gerstenhaber ブラケットの構造の計算を行った。

( 5 ) ホッホシルト拡大環の対称性

中山自己同型が対角化可能である多元環に関する研究として、ホッホシルト拡大環に関する研究を行った。ホッホシルト拡大環は 2-cocycle によって定まる。特に、2-cocycle が自明な場合は自明拡大環となる。ホッホシルト拡大環の同値性については、2 次のコホモロジーによって分類されている。特に standard duality module に関するホッホシルト拡大環は自己入射的であることが知られており、特に対称的なものが存在する。この研究では、2-cocycle の正規化を考えることによってホッホシルト拡大環が対称的であるための十分条件を与えた。

( 6 ) 自己入射的中山多元環のホッホシルト拡大環の籠

共同研究により、自己入射的中山多元環のホッホシルト拡大環の籠の構造を決定した。特に、自己入射的中山多元環のホッホシルト拡大環の籠は自明拡大環の籠または同じ籠のどちらか一方となることが分かった。

( 7 ) 切断的籠多元環のあるクラスに対するホッホシルト拡大環の籠と関係

( 6 ) に関連して、共同研究により、cycle が 0 となるような切断的籠多元環に対して、そのホッホシルト拡大環の籠および関係を構成した。結果として、この多元環のクラスに関しては、自明拡大環に関する結果を拡張することに成功した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Itagaki Tomohiro	4. 巻 112
2. 論文標題 Symmetric Hochschild extension algebras and normalized 2-cocycles	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Archiv der Mathematik	6. 最初と最後の頁 249 ~ 259
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00013-018-1249-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Koie Hideyuki, Itagaki Tomohiro, Sanada Katsunori	4. 巻 53
2. 論文標題 On presentations of Hochschild extension algebras for a class of self-injective Nakayama algebras	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 SUT Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 135 ~ 148
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Koie Hideyuki, Itagaki Tomohiro, Sanada Katsunori	4. 巻 46
2. 論文標題 The ordinary quivers of Hochschild extension algebras for self-injective Nakayama algebras	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 3950 ~ 3964
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/00927872.2018.1430806	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Itagaki Tomohiro, Sanada Katsunori, Usui Satoshi	4. 巻 581
2. 論文標題 A Batalin-Vilkovisky structure on the complete cohomology ring of a Frobenius algebra	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 226 ~ 277
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2021.04.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計17件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 6件）

1. 発表者名 Tomohiro Itagaki, Hideyuki Koie
2. 発表標題 The Hochschild cohomology of a class of exceptional periodic selfinjective algebras of polynomial growth
3. 学会等名 第8回日中韓環論国際シンポジウム（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 板垣智洋
2. 発表標題 BV algebra structures on Hochschild cohomology of self-injective Nakayama algebras
3. 学会等名 第65回代数学シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 板垣智洋
2. 発表標題 有限次元自己入射的多元環のホッホシルトコホモロジー上のBV構造について
3. 学会等名 第9回（非）可換代数とトポロジー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Tomohiro Itagaki
2. 発表標題 Batalin-Vilkovisky algebra structures on the Hochschild cohomology of self-injective Nakayama algebras
3. 学会等名 環論及び表現論シンポジウム
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tomohiro Itagaki
2. 発表標題 Symmetric Hochschild extension algebras and normalized 2-cocycles
3. 学会等名 The Mini-Workshop on Hochschild Cohomology and Related Topics III (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tomohiro Itagaki
2. 発表標題 A Batalin-Vilkovisky algebra structure on the Hochschild cohomology of self-injective Nakayama algebras
3. 学会等名 シュトゥットガルト大学表現論セミナー (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tomohiro Itagaki
2. 発表標題 Batalin-Vilkovisky algebra structures on the Hochschild cohomology of self-injective Nakayama algebras
3. 学会等名 華東師範大学数学科セミナー (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tomohiro Itagaki
2. 発表標題 Symmetric Hochschild extension algebras and the normalization of 2-cocycles.
3. 学会等名 シュトゥットガルト大学表現論セミナー (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 板垣智洋
2. 発表標題 Batalin-Vilkovisky algebra structures on the Hochschild cohomology of self-injective Nakayama algebras
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 板垣智洋
2. 発表標題 Symmetric Hochschild extension algebras and normalized 2-cocycles
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 鯉江秀行、板垣智洋、眞田克典
2. 発表標題 On presentations of Hochschild extension algebras for a class of self-injective Nakayama algebras
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 板垣智洋
2. 発表標題 Symmetric Hochschild extension algebras and normalized 2-cocycles
3. 学会等名 環論及び表現論シンポジウム
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 鯉江秀行、板垣智洋、眞田克典
2. 発表標題 The ordinary quivers of Hochschild extension algebras for self-injective Nakayama algebras
3. 学会等名 環論及び表現論シンポジウム
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 板垣智洋、鳥居猛、中本和典
2. 発表標題 Hochschild cohomology of Nm
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 板垣智洋、鳥居猛、中本和典
2. 発表標題 Hochschild cohomology of Nm
3. 学会等名 第53回環論及び表現論シンポジウム
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Tomohiro Itagaki
2. 発表標題 Batalin-Vilkovisky algebra structures on the Hochschild cohomology of self-injective Nakayama algebras
3. 学会等名 the Workshop and 18th International Conference on Representations of Algebras (国際学会)
4. 発表年 2018年



1. 発表者名 鯉江秀行、板垣智洋、眞田克典
2. 発表標題 自己入射的中山多元環に対するHochschild extension algebraのquiver表示
3. 学会等名 日本数学会2017年秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関