

令和 2 年 5 月 26 日現在

機関番号：32689

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K14176

研究課題名(和文) Almost Gorenstein環論の展開

研究課題名(英文) Development of the theory of almost Gorenstein rings

研究代表者

遠藤 直樹 (Endo, Naoki)

早稲田大学・グローバルエデュケーションセンター・講師(任期付)

研究者番号：30782510

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：2015年に研究代表者と後藤四郎、高橋亮が導入した高次元almost Gorenstein環論は、目下急速な発展を示しつつあるが、新興の概念であるため、未開拓課題も数多く残されている。本研究では、これら未開拓課題に挑みながら、almost Gorenstein環論の更なる深化・発展、充実を目指すものである。研究代表者は、イデアルに随伴するRees代数を始めとして、行列式環やfiber積、Arf環のalmost Gorenstein性解析に従事し、それらの判定条件を得た。加えて、J. Lipmanにより導入されたArf環をweakly Arf環へ拡張し、基礎理論の整備を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Cohen-Macaulay環の階層化問題への第一歩として導入されたalmost Gorenstein環論は、研究代表者を含めた日本人研究者を中心とする日本発の新規性の高いオリジナルな研究である。本研究で得られた結果は、国内外における学会・研究集会講演・専門学術誌を通して、世界に広く公表している。これらの成果は、可換環論だけではなく、代数幾何学や特異点論、表現論、組合せ論など関連する諸分野への波及効果も期待できるものである。

研究成果の概要(英文)：Although the theory of almost Gorenstein rings for higher dimension which was introduced by S. Goto, R. Takahashi, and myself in 2015 is nowadays developing rapidly, there are many unexplored problems, as it is a new concept of Cohen-Macaulay rings. The aim of this research is to explore such problems to enrich the theory of almost Gorenstein rings. More precisely, we investigated the question of when the Rees algebras of ideals, fiber products, and Arf rings are almost Gorenstein, and provided the criterion of them. Besides, we introduce and develop the theory of weakly Arf rings, which is a generalization of Arf rings, initially defined by J. Lipman in 1971.

研究分野：代数学

キーワード：Cohen-Macaulay環 Gorenstein環 Almost Gorenstein環 Rees代数 行列式環 Fiber積 Arf環

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

## 1. 研究開始当初の背景

本研究では Gorenstein 環を核とした「Cohen-Macaulay 環の階層化問題」に従事する。即ち、可換環論の中でも最重要の研究対象である Cohen-Macaulay 環に対して、新たな環のクラスを提示し、Gorenstein 性との差異を指標とした階層化を通して、可換環論に新たな展望を齎すことを目標とする。根底には、何故 Gorenstein でない Cohen-Macaulay 環が多様かつ豊富に存在するのか、という素朴な疑問がある。Gorenstein 環・Cohen-Macaulay 環は、現代可換環論を大きく飛躍させるに至った両翼であるにも関わらず、これら 2 つの環の差異の度合いに関しては、殆ど解析されていない。(局所)環の細分化という従来の願望からも、Gorenstein 環と Cohen-Macaulay 環の間の階層化は急務であり、関連分野の発展にとっても、Cohen-Macaulay 環の魅力で発展性のある新しいクラスが提示され、解析されることの意義は少なくない。

環や加群の Cohen-Macaulay 性は homology 代数と非常に相性が良く、深い研究がなされ多くの優れた成果が挙げられている。歴史を遡ると、20 世紀後半、代数幾何学、特異点論、不変式論などに現れる様々な環の Cohen-Macaulay 性判定が、M. Hochster, C. Huneke, W. V. Vasconcelos, D. Eisenbud, J. Herzog, W. Bruns, B. Ulrich, 後藤四郎, 渡辺敬一達によって精力的に実施され、一方で組合せ論への応用が R. Stanley によって発見されるなど今日ではあらゆる処に Cohen-Macaulay 環が見出されるに至っている。この間、1963 年に H. Bass によって創始された Gorenstein 環論は、J. Herzog-E. Kunz により正準加群の理論として書き直され、現代可換環論の礎を築いた。Gorenstein 環は Cohen-Macaulay 環であって、美しい対称性を持つ。現代可換環論において、Gorenstein 環はあらゆる分野に現れ、その対称性故に重要な役割を果たす。しかしながら、一度 Cohen-Macaulay 性解析に従事すると、Gorenstein でない Cohen-Macaulay 環が何故大量かつ多様に存在するのか、という素朴な疑問に捕われる。例えば、体  $k$  上の不定元の成す  $(m, n)$  行列  $X = [X_{ij}]$  の  $t$  次  $(2 \leq t \leq \min\{m, n\})$  小行列式が生成する多項式環  $k[X]$  のイデアルを  $It(X)$  とすると、行列式環  $k[X]/It(X)$  は必ず Cohen-Macaulay (正規整域) であるが、 $k[X]/It(X)$  が Gorenstein 環となるための必要十分条件は  $t$  には拠らず、 $m = n$ 、即ち  $X$  が正方行列であることである。体  $k$  上の数値半群環  $k[H]$  の Gorenstein 性は、対応する数値半群  $H$  の対称性と同値である。これらの例が端的に示すことは、豊富に存在する Cohen-Macaulay 環の中でも美しい対称性を持つ Gorenstein 環は限定されたクラスを成すという事実である。

つまり、「Cohen-Macaulay 環の階層化問題」への第一歩として考えるべきは、「Gorenstein 環とは限らないが、Gorenstein 環に次いで優れた構造を持つ Cohen-Macaulay 環とは如何なる存在であるべきか」という問いであり、この視点からの環構造解析とそれに基づく新分野の開拓は、可換環論における喫緊の課題である。この問題意識に対して、2015 年に研究代表者と後藤四郎、高橋亮が提示した almost Gorenstein 環は、この問いに応え得る重要な候補である。

## 2. 研究の目的

Almost Gorenstein 環論は目下急速な発展を示しつつあるが、新興の概念であるため、未開拓課題も数多く残されている。本研究では、これら未開拓課題に挑みながら、almost Gorenstein 環論の更なる深化・発展、充実を通して、関連分野への応用・浸透を図ることを目的とする。

## 3. 研究の方法

可換環論の研究手法は、大きく分けて、可換環の内部構造を解析するイデアル論的手法と可換環が作用する対象について考察する加群論・圏論的手法がある。研究代表者の興味は、前者のイデアル論的手法を駆使した古典的な可換環論にあり、本研究では、具体的課題を下記のように設定し、与えられた 3 年間で成果を挙げることを目指した。

課題 (1) 2 次元正則局所環上の contracted ideals, 及び 2 次元 excellent Gorenstein 正規局所環上の pg ideals に関する Rees 代数が almost Gorenstein 環となる判定条件を与える。

課題 (2) 行列式環が almost Gorenstein 環となる特徴付けを求める。

課題 (3) Fiber 積が almost Gorenstein 環となる特徴付けを求める。

課題 (4) Arf 環が almost Gorenstein 環となる特徴付けを求める。

課題 (5) 課題 (4) の成果を踏まえ、Arf 環を weakly Arf 環へ拡張し、基礎理論を整備する。

## 4. 研究成果

課題 (1) の原点は、1979 年の後藤四郎-下田保博による Rees 代数の Cohen-Macaulay 性解析にあり、現在では、数多に存在する Cohen-Macaulay Rees 代数の中でも、Gorenstein 環はごく僅かであることが明らかにされている。従って、これら非 Gorenstein Cohen-Macaulay Rees 代数の中には、almost Gorenstein 環となるべきものが豊富に含まれていて、解明を待っていると推測される。研究代表者は、後藤四郎、松岡直之、吉田健一との共同研究において、2 次元正則局所環上の contracted ideals に関する Rees 代数の almost Gorenstein 性の判定条件を与え

た。また、2次元 excellent Gorenstein 正規局所環上の pg ideals に関する Rees 代数が almost Gorenstein 環であることも示した。

課題(2)は、行列式環の almost Gorenstein 性解析に取り組んだものである。研究代表者は、行列式環の極小自由分解の構造を解析することで、行列式環が almost Gorenstein となるための必要十分条件を与えた。主結果の帰結として、行列式環が almost Gorenstein であれば、極小重複度を持つことが従う。

課題(3)では、fiber 積の almost Gorenstein 性解析に従事した。適切な仮定の下、環の準同型写像から定義される fiber 積が Gorenstein 環となるのは、基礎環が正則である場合に限る。一方、fiber 積が Gorenstein 環ではないとしても、完全交叉局所環の fiber 積は依然として良い性質を持つはずである。この視点を踏まえ、課題(3)は、後藤四郎、磯部遼太郎との共同研究として実施され、fiber 積の almost Gorenstein 性に関する特徴付けを与えた。

課題(4)では、1971年の J. Lipman による stable ideals の解析から着想を得て、Arf 環の almost Gorenstein 性解析に着手した。研究代表者は、E. Celikbas, O. Celikbas, 後藤四郎との共同研究において Arf 環の almost Gorenstein 性に関する判定条件を与えた。この成果は、1997年の V. Barucci-R. Fröberg の結果を環論的視点から拡張するものである。

課題(5)は、課題(4)の成果を踏まえ、J. Lipman による Arf 環論を、古典的なイデアル論の立場から考察し、weakly Arf 環論へと拡張し、基礎理論の構築と整備を行った。課題(5)では、不変式環や行列式環、イデアル化、ファイバー積を用いた weakly Arf 環の構成法を提示し、また、F-pure な Noether 環、さらに任意の体上の Stanley-Reisner 環が weakly Arf 環であることの証明にも成功した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 12件 / うち国際共著 6件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Olgur Celikbas, Arash Sadeghi, and Naoki Taniguchi	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 On modules with reducible complexity	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Algebras and Representation Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Naoki Endo, Shiro Goto, Naoyuki Matsuoka, and Yuki Yamamoto	4. 巻 148
2. 論文標題 Efficient generation of ideals in core subalgebras of the polynomial ring $k[t]$ over a field $k$	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3283-3292
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/15032	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Naoki Endo	4. 巻 126
2. 論文標題 On Ratliff-Rush closure of modules	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematica Scandinavica	6. 最初と最後の頁 170-188
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7146/math.scand.a-119672	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shiro Goto, Ryotaro Isobe, and Naoki Taniguchi	4. 巻 555
2. 論文標題 Ulrich ideals and 2-AGL rings	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 96-130
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2020.01.028	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Olgur Celikbas, Shiro Goto, Ryo Takahashi, and Naoki Taniguchi	4. 巻 62
2. 論文標題 On the ideal case of a conjecture of Huneke and Wiegand	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 847-859
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0013091518000731	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Generalized Gorenstein Arf rings	4. 巻 57
2. 論文標題 Ela Celikbas, Olgur Celikbas, Shiro Goto, and Naoki Taniguchi	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Arkiv for Matematik	6. 最初と最後の頁 35-53
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/ARKIV.2019.v57.n1.a3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Shiro Goto, Naoyuki Matsuoka, Naoki Taniguchi, Ken-ichi Yoshida	4. 巻 59
2. 論文標題 On the almost Gorenstein property in Rees algebras of contracted ideals	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 769-785
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1215/21562261-2018-0001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naoki Taniguchi, Tran Thi Phuong, Nguyen Thi Dung, and Tran Nguyen An	4. 巻 10
2. 論文標題 Topics on sequentially Cohen-Macaulay modules	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Commutative Algebra	6. 最初と最後の頁 295-304
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1216/JCA-2018-10-2-295	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Naoki Taniguchi	4. 巻 46
2. 論文標題 On the almost Gorenstein property of determinantal rings	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 1165-1178
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00927872.2017.1339066	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shiro Goto, Naoyuki Matsuoka, Naoki Taniguchi, Ken-ichi Yoshida	4. 巻 67
2. 論文標題 Almost Gorenstein Rees algebras of $pg$ -ideals, good ideals, and powers of the maximal ideals	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Michigan Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 159-174
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1307/mmj/1516330972	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shiro Goto, Rahimi Mehran, Naoki Taniguchi, Hoang Le Truong	4. 巻 57
2. 論文標題 When are the Rees algebras of parameter ideals almost Gorenstein graded rings?	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 655-666
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1215/21562261-2017-0010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Naoki Taniguchi, Tran Thi Phuong, Nguyen Thi Dung, Tran Nguyen An	4. 巻 69
2. 論文標題 Sequentially Cohen-Macaulay Rees algebras	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 293-309
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/06910293	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計15件(うち招待講演 9件/うち国際学会 11件)

1. 発表者名 Naoki Endo
2. 発表標題 On weakly Arf rings
3. 学会等名 The 41st Japan Symposium on Commutative Algebra (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoki Endo
2. 発表標題 Almost Gorenstein Rees algebras
3. 学会等名 Special Day: Commutative Algebra seminar (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoki Endo
2. 発表標題 Almost Gorenstein Rees algebras
3. 学会等名 The 8th China-Japan-Korea International Symposium on Ring Theory (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoki Endo
2. 発表標題 Almost Gorenstein rings arising from fiber products
3. 学会等名 第 32 回可換環論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoki Endo
2. 発表標題 Introduction to the theory of almost Gorenstein rings
3. 学会等名 Sifert Commutative Algebra Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoki Taniguchi
2. 発表標題 Ulrich ideals in 2-almost Gorenstein rings
3. 学会等名 AMS Spring Central and Western Joint Sectional Meeting, Special Session on Commutative Algebra and its Environs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoki Taniguchi
2. 発表標題 Almost Gorenstein rings -towards a stratification of Cohen-Macaulay rings-
3. 学会等名 Frobenius Action in Commutative Algebra: Recent Developments (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shiro Goto, Ryotaro Isobe, and Naoki Taniguchi
2. 発表標題 AGL rings arising as fiber products
3. 学会等名 The 40th Symposium on Commutative Algebra (国際学会)
4. 発表年 2018年



1. 発表者名 Naoki Taniguchi
2. 発表標題 On the ideal case of a conjecture of Huneke and Wiegand
3. 学会等名 The 10th Japan-Vietnam Joint seminar on Commutative Algebra (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Naoki Taniguchi
2. 発表標題 Huneke-Wiegand conjecture and weakly $m$ -full ideals
3. 学会等名 第31回可換環論セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Naoki Taniguchi
2. 発表標題 Depth formula and modules with reducible complexity
3. 学会等名 Mini-workshop on Commutative Algebra (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Naoki Taniguchi
2. 発表標題 On Ratliff-Rush closure of modules
3. 学会等名 AMS Spring Central Sectional Meeting, Special Session on Homological Algebra (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Naoki Taniguchi
2. 発表標題 Generalized Gorenstein Arf rings
3. 学会等名 International School and Workshop on Commutative Algebra (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Naoki Taniguchi
2. 発表標題 Almost Gorenstein rings
3. 学会等名 Colloquium at West Virginia University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Naoki Taniguchi
2. 発表標題 On Ratliff-Rush closure of modules
3. 学会等名 The 39th Japan Symposium on Commutative Algebra (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 齋藤正顕, 高木悟, 谷口直樹	4. 発行年 2019年
2. 出版社 早稲田大学出版会	5. 総ページ数 228
3. 書名 数学基礎プラス (最適化編)2019 -利益の最大化は損失を最小にするか?-	

1. 著者名 齋藤正顕, 高木悟, 谷口直樹	4. 発行年 2018年
2. 出版社 加藤文明社	5. 総ページ数 228
3. 書名 数学基礎プラス (最適化編)2018 -利益の最大化は損失を最小にするか?-	

〔産業財産権〕

〔その他〕

Naoki Endoのweb page <a href="https://www.math.purdue.edu/~nendo/">https://www.math.purdue.edu/~nendo/</a>
--

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----