

令和 4 年 6 月 22 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K14178

研究課題名（和文）離散群に関わる幾何学とその応用

研究課題名（英文）Geometry of discrete groups and its applications

研究代表者

田中 亮吉 (Tanaka, Ryokichi)

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：80629759

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,100,000円

研究成果の概要（和文）：指数増大度を持つ従順群の例として離散アフィン群を導入し、その上の有界調和関数の研究を行った。この成果は2021年に論文として出版された。またグロモフ双曲群上のランダムウォークから定まる調和測度とパターンソン・サリヴァン測度の比較についての研究に継続して取り組んだ。この成果の一部は2021年に論文として出版された。さらにProduct replacement chainの研究を行いすべての有限群について精密な混合時間の評価を行いカットオフ現象を証明した。この成果は2020年に論文として出版された。

研究成果の学術的意義や社会的意義

指数増大度を持つ従順群の例として離散アフィン群を導入し、その上の有界調和関数の研究を行った成果は、離散群の理解を広げるために行いました。またグロモフ双曲群上のランダムウォークから定まる調和測度とパターンソン・サリヴァン測度の比較についての研究は古典的な力学系（カオス的な振る舞いをする測地流など）の研究の自然な発展に位置しています。さらにProduct replacement chainは理論コンピュータ科学において導入され実際に工学的な問題に使われてきました。我々の成果はこのアルゴリズムの振る舞いの効率性についての知見を与えました。

研究成果の概要（英文）：First we introduced a finitely generated group, which we called a discrete affine group, and studied bounded harmonic functions on the group. The result we obtained was published in 2021. Next we studied a comparison problem between harmonic measures and Patterson-Sullivan measures for Gromov hyperbolic groups.

A part of our results was published in 2021. Finally we studied so called product replacement chain and established a cutoff phenomenon for any fixed finite group. The result was published in 2020.

研究分野：離散群論

キーワード：離散群 ランダムウォーク

1. 研究開始当初の背景

離散群の幾何学(幾何学的群論)は、多くの分野と関わりを持ちながら近年益々活発になってきている分野である。その中で、研究者の手法により、例えば、トポロジー、リーマン幾何学、力学系(エルゴード理論)、作用素環論、計算機科学(また最近では加法的組み合わせ論)などに分けることが出来る。申請者は確率論と離散幾何解析、双方向の研究を意識して行い、またそれから出てきた新しいアイデアを別の問題に生かしていくという姿勢で研究を行ってきた。離散群論における幾何解析的問題(特に調和関数の存在問題)は、確率論の言葉で記述出来るので、確率論からのアプローチは自然である。申請者は、これまで海外の(主として若手の)研究者たちと連絡を取り合い、いくつかの共同研究を行ってきた(その一つはある可解群の有界調和関数全体の空間を記述する問題 --- Poisson 境界を決定する --- ものである)。申請者の研究に共通するテーマは「離散群の構造がその上の解析学を決定するか?」という問題である。現在、この分野で最も大きな問題とされているのが、有限生成群の Liouville 性(非定数有界調和関数の非存在)は群の代数的な性質のみで記述出来るか? という問題である(Liouville 性安定性問題)。(これはグラフ一般では成り立たない。) Liouville 性の確率論的な必要十分条件(エントロピーを用いる)が Kaimanovich-Vershik (1979)によって得られている。この問題は、言い換えれば、このエントロピーの条件をランダムウォークの取り方に依存せず、定義出来るか? というものになる。この問題へのアプローチから新しいアイデア、手法が生まれ、距離幾何や応用寄りの確率論にも大きな影響を及ぼしている。

2. 研究の目的

1. Liouville 性安定性問題: 有限生成群の Liouville 性の必要十分条件は、単純ランダムウォークの

エントロピーが 0 であることであり、これは対応するスピード(力学系におけるリャプノフ指数の類似)が 0 であることと同値である。これらの量は、単純ランダムウォークが生成系の取り方に依存するため、(ア・プリオリには)群の性質ではない。多くの重要なクラスの群で、エントロピー等の研究がされてきたものの、振る舞いが複雑になる、従順(amenable)かつ体積増大度が指数関数的な群一般における理解は乏しいのが現状である。まずは、体積増大度指数的な群の良いサブクラスである Lamplighter やその類似の群について、エントロピーの下からの一般的な下界を明らかにする。

2. グロモフ双曲群のリャプノフ指数(スピード)の解析性: Liouville 性安定性問題のもう一つのアプローチは、エントロピーやスピードをランダムウォークの汎函数と考えたとき、これらは連続的か? を問うものである(Kaimanovich による)。もしそれらが(適切な意味で)連続ならば、Liouville 性は「開」(open)な性質であることになり、安定性への大きな証拠となる。この方向では、特にグロモフ双曲群においてエントロピーやスピード汎函数の正則性が詳しく研究されてきている。申請者の発展させてきたオートマトンを用いた解析を用いて、一般的な状況でのスピード汎函数の実解析性の証明を与える。

3. Kac walk と $SGL_n(\mathbb{F}_2)$ の混合時間:

Kac walk とは Marc Kac が統計力学における Boltzmann 方程式導出の数学的理解のために考案した確率モデルであり、回転群 $SO(n)$ 上のランダムウォークである。平衡状態への収束への速さ(混合時間)について多項式時間の上界が初めて与えられたのがごく最近である。一方で、 $SGL_n(\mathbb{F}_2)$ の初等行変換によるマルコフ連鎖は Kac walk の類似として、計算機科学との関連でも興味深い。異なる群であるが、両者の研究は平行して進んで来た。 $SGL_n(\mathbb{F}_2)$ の混合時間の最良の上界についての予想は両者とも n^2 である。まず、 $SGL_n(\mathbb{F}_2)$ について、への改良を与える。

3. 研究の方法

申請者が、共同研究を行ってきた海外の研究者と、引き続き協力して研究を行っていく。

また、前研究課題(若手研究 B)「離散群とグラフの境界の離散幾何解析学」における結果を研究目的の方向に発展させていく。これまで共同研究として行ってきた「従順かつ体積増大度が指数的な群」の研究を Liouville 性安定性問題に向ける。主に単独で行ってきたグロモフ双曲群の研究については、申請者のオリジナルの手法であるオートマトンを用いた記号力学系の研究を応用する。確率論と幾何学的群論の新しい手法の開発が必要となる Kac walk の混合時間の問題について、海外共同研究者と協力して研究を進めていく。

4. 研究成果

1. Liouville 性安定性問題:

指数増大度を持つ従順群の例として離散アファイン群を導入し、その上の有界調和関数の研究

を

Jeremie Briessel (モンペリエ大学)と Tianyi Zheng (カリフォルニア大学サンディエゴ校)と共同で行った。この群の有限台を持つ確率測度に駆動されたランダムウォークのポアソン境界、Hilbert 圧縮定数、熱核の対角での挙動、L1-等周プロファイルを決定した。この成果は 2021 年に論文として出版された。

2. グロモフ双曲群のリアプノフ指数(スピード)の解析性:

グロモフ双曲群上のランダムウォークから定まる調和測度とパターンソン・サリヴァン測度の比較についての研究に継続して取り組んだ。これはオートマティック構造を用いた記号力学系の研究として押し進めてきたものである。これまで平均歪み度という量を導入して、この量と指数増大度が 2 つの距離の擬相似類を決定する(歪み不等式の等号成立条件が必要十分条件になる)ということを示すことができた。この成果の一部は 2021 年に論文として出版された。

3. Kac walk と $GL_n(\mathbb{F}_2)$ の混合時間:

また 1 次元の離散円周において Glauber-Exclusion 過程の混合時間の研究を行った。この過程が単調であるという仮定の元で、流体力学的極限における方程式の反応項が狭義凸ポテンシャルを持つときに高速混合性を証明した。成果はプレプリントにまとめ公開している。これは当初の研究計画の 1 つである統計力学模型についての研究についてのものである。また $GL_n(\mathbb{F}_2)$ の問題と関連して Product replacement chain の研究を行いすべての有限群について精密な混合時間の評価を行いカットオフ現象を証明した(Yuval Peres (Kent State University)と Alex Zhai(Stanford 大学:当時)との共同研究)。これは $GL_n(\mathbb{F}_2)$ の最初の k 個の行を固定して n を無限大に飛ばす極限を考えるという状況が特殊な場合と含まれる。この成果は 2020 年に論文として出版された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 TANAKA RYOKICHI	4. 巻 41
2. 論文標題 Topological flows for hyperbolic groups	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Ergodic Theory and Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 3474 ~ 3520
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/etds.2020.101	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuval Peres, Ryokichi Tanaka, Alex Zhai	4. 巻 177
2. 論文標題 Cutoff for product replacement on finite groups	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Probability Theory and Related Fields	6. 最初と最後の頁 823-853
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00440-020-00962-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Ryokichi Tanaka	4. 巻 39
2. 論文標題 Dimension of harmonic measures in hyperbolic spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Ergodic Theory and Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 474-499
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/etds.2017.23	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 TANAKA RYOKICHI	4. 巻 39
2. 論文標題 Dimension of harmonic measures in hyperbolic spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Ergodic Theory and Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 474 ~ 499
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/etds.2017.23	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kajigaya Toru, Tanaka Ryokichi	4. 巻 4
2. 論文標題 Uniformizing surfaces via discrete harmonic maps	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Annales Henri Lebesgue	6. 最初と最後の頁 1767 ~ 1807
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/ahl.116	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Brieussel Jeremie, Tanaka Ryokichi, Zheng Tianyi	4. 巻 15
2. 論文標題 Random walks on the discrete affine group	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Groups, Geometry, and Dynamics	6. 最初と最後の頁 935 ~ 963
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/GGD/616	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計35件 (うち招待講演 34件 / うち国際学会 13件)

1. 発表者名 Ryokichi Tanaka
2. 発表標題 Topological flows for hyperbolic groups
3. 学会等名 Geometric Group Theory in East Asia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ryokichi Tanaka
2. 発表標題 Uniformizing surfaces via discrete harmonic maps
3. 学会等名 Rainwater Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ryokichi Tanaka
2. 発表標題 Cutoff for product replacement on finite groups
3. 学会等名 Kobe Workshop on Probabilistic Potential Theory and Related Fields (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中亮吉
2. 発表標題 Cutoff for product replacement on finite groups
3. 学会等名 東京確率論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中亮吉
2. 発表標題 Uniformizing surfaces via discrete harmonic maps
3. 学会等名 東北複素解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中亮吉
2. 発表標題 離散群のポアソン境界
3. 学会等名 2019年度表現論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中亮吉
2. 発表標題 An optimal hyperbolic metric for graph embedding
3. 学会等名 東工大複素解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 田中亮吉
2. 発表標題 ランダムディリクレ級数
3. 学会等名 整数論セミナー，東北大学（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ryokichi Tanaka
2. 発表標題 Poisson boundary for the discrete affine group
3. 学会等名 2018 Spring Probability Workshop, Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中亮吉
2. 発表標題 Poisson boundary for the discrete affine group
3. 学会等名 作用素環セミナー，東京大学（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ryokichi Tanaka
2. 発表標題 Dimension of harmonic measures in hyperbolic spaces
3. 学会等名 Conference in Geometric Group Theory, Beijing International Center for Mathematical Research (BICMR), Beijing, China (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中亮吉
2. 発表標題 ``Spectral gaps, log-Sobolev constants, and mixing times'', ``Mixing times, couplings, and cutoffs''
3. 学会等名 幾何学阿蘇研究集会, 休暇村 南阿蘇 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中亮吉
2. 発表標題 パラメータ付きPatterson-Sullivan測度
3. 学会等名 早稲田双曲幾何幾何学的群論セミナー, 早稲田大学 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中亮吉
2. 発表標題 Cutoff for the product replacement algorithm
3. 学会等名 CRESTミーティング, 京都大学高等研究院
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中亮吉
2. 発表標題 双曲群における調和測度のハウスドルフ次元公式とその応用
3. 学会等名 幾何セミナー, 大阪大学 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中亮吉
2. 発表標題 Cutoff for the product replacement chain
3. 学会等名 談話会, 大阪大学 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ryokichi Tanaka
2. 発表標題 Cutoff for product replacement on finite groups
3. 学会等名 Seminaire Gaston Darboux, Universite de Montpellier (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ryokichi Tanaka
2. 発表標題 Cutoff for product replacement on finite groups
3. 学会等名 AIMR Workshop on Pure and Applied Mathematics, Tohoku University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中亮吉
2. 発表標題 Dimension of harmonic measures in hyperbolic spaces
3. 学会等名 2018年度「リーマン面・不連続群」研究集会, 早稲田大学 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中亮吉
2. 発表標題 さまざまな群上のランダムウォーク
3. 学会等名 第64回幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ryokichi Tanaka
2. 発表標題 Dimension of harmonic measures in hyperbolic spaces
3. 学会等名 The 3rd Japan-China geometry conference, Tohoku University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 田中亮吉
2. 発表標題 ランダム生成系のマルコフ連鎖とカットオフ
3. 学会等名 福岡大学微分幾何セミナー, 福岡大学 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ryokichi Tanaka
2. 発表標題 Equivalence of measures at infinity for word hyperbolic groups
3. 学会等名 EGGS(Ergodic and Geometric Group theory in Sendai), Tohoku University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ryokichi Tanaka
2. 発表標題 Continuous and discrete potential theory in Gromov hyperbolic spaces
3. 学会等名 Global properties in potential theory of continuous and discrete spaces, Hokkaido University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 田中亮吉
2. 発表標題 離散アファイン群のポアソン境界
3. 学会等名 2017年度福岡大学微分幾何研究集会, 福岡大学 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ryokichi Tanaka
2. 発表標題 Rough isometries and measures at infinity for word hyperbolic groups
3. 学会等名 Rigidity School, Nagoya 2017, Nagoya University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ryokichi Tanaka
2. 発表標題 Isoperimetric profile and return probability for the discrete affine group
3. 学会等名 Geometry and Probability, Tohoku University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ryokichi Tanaka
2. 発表標題 Random walks on the discrete affine group
3. 学会等名 Young Geometric Analysts' Forum 2018, Sanya, China (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中亮吉
2. 発表標題 調和測度のハウスドルフ次元公式
3. 学会等名 リーマン幾何と幾何解析, 筑波大学 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中亮吉
2. 発表標題 離散群上のポテンシャル論における距離埋め込みの方法
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会 幾何学分科会特別講演, 東京大学 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ryokichi Tanaka
2. 発表標題 The Manhattan curve and rough similarity rigidity
3. 学会等名 Pacific Dynamics Seminar (online) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ryokichi Tanaka
2. 発表標題 The Manhattan curve and rough similarity rigidity
3. 学会等名 Ohio State University, Ergodic Theory Seminar (online) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田中亮吉
2. 発表標題 Glauber-Exclusion dynamics: rapid mixing regime
3. 学会等名 The 19th Symposium Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems (online) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田中亮吉
2. 発表標題 双曲群の位相流と擬相似剛性定理
3. 学会等名 微分トポロジーセミナー (online) (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 田中亮吉
2. 発表標題 有限グラフの埋め込みに対する最適な双曲曲面の存在とその構成
3. 学会等名 代数・解析・幾何学 セミナー (online) (招待講演)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Ryokichi Tanaka http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~rtanaka
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------