

令和 6 年 6 月 3 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2023

課題番号：17K14179

研究課題名（和文）空間の`良い`分割とラプラシアン固有値

研究課題名（英文）`Nice` partitions and eigenvalues of the Laplacian

研究代表者

船野 敬 (Funano, Kei)

東北大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：40614144

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：ラプラシアンの固有値と固有関数に関する研究を行った。埼玉大学の櫻井陽平氏と共同でラプラシアンの固有関数並びに節集合に関する集中不等式を、またコンパクトリーマン多様体上の p ラプラシアンの固有値の上からの評価を部分集合のデータを元に与えた。固有値の評価では閉リーマン多様体の場合と境界付きコンパクト多様体でディリクレ境界条件、ノイマン境界条件のどちらの場合も与えている。ユークリッド空間の有界凸領域に関するノイマン境界条件の下でのラプラシアンの固有値の領域単調性の研究を行い、シャープな不等式を得た。ユークリッド空間の有界凸領域上のノイマン境界条件の下でのラプラシアンの固有値に関する普遍不等式を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ラプラシアンの固有値や固有関数は熱方程式等の物理学に現れる偏微分方程式の解の形を知る際に有用な情報を含んでいる。また幾何学的量とラプラシアンの固有値の関係について近年まで活発に研究されている。そうした中で多くの研究者は境界がついてる条件下ではディリクレ境界条件について研究をしてノイマン境界条件の下での研究はわずかなもので手つかずであった。そのような状況なので本研究で行ったノイマン境界条件の下での固有値の研究は一定の学術的意義があると思われる。

研究成果の概要（英文）：I studied eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian. Working jointly with Yohei Sakurai (Saitama university), we obtained concentration inequalities of eigenfunctions of the Laplacian and its nodal sets. We also gave an estimate of eigenvalues of the Laplacian from above in terms of subsets. The domain monotonicity of the eigenvalues of the Laplacian under Neumann boundary conditions on bounded convex domains of Euclidean spaces is studied and sharp inequalities are obtained. Furthermore, universal inequalities are obtained for the eigenvalues of the Laplacian under Neumann boundary conditions on bounded convex domains of Euclidean spaces.

研究分野：スペクトル幾何学

キーワード：ラプラシアンの固有値 ラプラシアンの固有関数 凸領域

1. 研究開始当初の背景

閉リーマン多様体のラプラシアン固有値の部分集合の情報を用いた上からの評価は Chung-Grigor'yan-Yau により熱核に関する不等式を用いて行われた。この証明方法では境界付きでディリクレ境界条件を課したラプラシアンの固有値や p -ラプラシアンの固有値には適応できない。また、ラプラシアンの固有関数に対しては Sogge によりシャープな集中不等式が示されていたし、節集合の周りの集中不等式は Bruning によって知られていた。ユークリッド空間の有界凸領域に関する(ノイマン境界条件下での)ラプラシアンの固有値の領域単調性の研究は E. Milman が第一固有値の場合に行い、その後私が一般の固有値の場合に行った。またユークリッド空間の有界凸領域上で(ノイマン境界条件下での)ラプラシアンの固有値の間の普遍不等式は第一固有値と第 k 固有値に対しては、S. Liu と私によって研究があったが連続した固有値に対しては未知であった。私によって第 k 固有値と第 $k+1$ 固有値の比が上から(次元やどのパラメーターにもよらない)普遍定数で抑えられることが予想として提起されていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は閉リーマン多様体或いはユークリッド空間の有界凸領域上のラプラシアンの固有値の間の普遍不等式並びに定数倍を除いた領域単調性/非単調性を空間の「良い」分割を取ることによって示すことにある(領域を考える際はノイマン境界条件下でのラプラシアンの固有値を考える)。またラプラシアンの固有関数を測度の集中の観点から研究するのも目的である。

3. 研究の方法

(閉リーマン多様体あるいは領域上のノイマン境界条件下での)ラプラシアンの固有値は Buser によって考えている空間の良い分割を与えれば良い下からの評価を与えることが知られていた。また Chung-Grigor'yan-Yau により上からの評価は考えている空間の部分集合の情報を用いて表されていた。これらの評価を最適輸送並びに測度の集中を用いて繋げることにより固有値の間の普遍不等式や固有値の新しい上からの評価、固有値の領域単調性を研究する。

4. 研究成果

・ラプラシアンの固有関数の集中不等式の研究

埼玉大学の櫻井陽平氏と共同で閉リーマン多様体のラプラシアンの固有関数についての研究を行った。境界集中の手法を用いて、ラプラシアンの固有関数の節集合の周りの指数的集中不等式を示した。特に、固有関数の節集合の近傍は固有値が大きければ大きいほど考えている空間の体積に近くなる。またこの不等式と Colding-Minicozzi の議論を併せて新しいタイプのラプラシアンの固有関数の集中不等式を得た。これらの結果は論文にまとめ、Proceedings of American Mathematical Society に採録された([4])。

・ラプラシアンの固有値の上からの評価

埼玉大学の櫻井陽平氏と共同でラプラシアンの固有値の上からの評価を考えている空間の部分集合の情報を用いて与えた。より具体的にこの研究では

- (1) 閉リーマン多様体の場合の p -ラプラシアンの固有値
- (2) リーマン多様体の有界部分領域でノイマン境界条件あるいはディリクレ境界条件を課した場合の p -ラプラシアンの固有値
- (3) 有限グラフの p -ラプラシアンの固有値

の場合を研究し、それぞれの場合に結果を得ることができた。閉リーマン多様体の場合、あるいはリーマン多様体の有界領域上でのノイマン境界条件の普通のラプラシアンの固有値の場合は Chung-Grigor'yan-Yau により熱核の固有値・固有関数展開や熱核の評価を用いて上からの評価は部分集合の情報を用いて示されていたが、 p -ラプラシアンの固有値の場合やディリクレ境界条件を課した場合については不明であった。我々は境界集中不等式の研究を応用してより上述の(1)、(2)、(3)といったより一般の場合に統一的な枠組みで上からの評価を示すことができた。また同様の手法を用いて同じ評価がチーガーの等周定数の一般化である多重等周定数についても成立することが分かった。これらの結果は論文にまとめ Transaction of American Mathematical Society に採録された([3])。

またポリヤ予想に関連するノイマン境界条件を課したラプラシアン固有値の上からの評価を得た。具体的には非負リッチ曲率を持つ多様体の測地的凸領域上で今まで知られている中で一番評価の良い不等式を示している ([2])。

・領域単調性の研究

空間の分割とラプラシアン固有値が関連することをを用いてユークリッド空間の有界凸領域同士に関する(ノイマン境界条件下での)ラプラシアンの固有値の領域単調性の研究を行った。得られた結果は λ_1 と λ_2 が n 次元ユークリッド空間の二つの有界凸領域 Ω_1 と Ω_2 が $\Omega_1 \subset \Omega_2$ に含まれていると仮定すると、 λ_1 のラプラシアンの第 k 固有値が上から λ_2 のラプラシアンの第 k 固有値の定数 $\times n^2$ 倍で抑えられるというものである。これは私によって得られていた評価を大幅に改善し、さらにシャープな評価を与えていることも示した。証明に用いた境界集中不等式を駆使して、球と凸領域の共通部分で混合境界条件を課したラプラシアンの第一固有値の上からの評価も与えている。これらの結果は論文にまとめ Illinois Journal of Mathematics に採録された ([2])。

・普遍不等式の研究

ユークリッド空間の有界凸領域上のノイマン境界条件を課したラプラシアン固有値の間の普遍不等式の研究を行った。ユークリッド空間の有界領域上でディリクレ境界条件を課したラプラシアンの固有値の場合は様々な固有値の間の普遍不等式が知られていた。Colin de Verdiereにより任意の単調増加有限数列に対して有界領域が存在してそこでのノイマン境界条件を課したラプラシアンの固有値がその数列と同じになることが示されているので、考えている領域の制限なしではノイマン境界条件を課したラプラシアンの固有値の場合には固有値の間になんの関係も見出すことはできない。私により有界凸領域上では連続した番号の(ノイマン境界条件を課した)ラプラシアンの固有値の比が上から定数で評価されるという予想がされていた。本研究では境界集中不等式、最適輸送、ポロノイ図を駆使してこの予想にアタックし、固有値の比が定数倍 $\times n^4$ (n は次元) で上から評価されることを示した。ポロノイ図を駆使しているので残念ながらポロノイ図に関する研究が進んでいない多様体上ではこの議論は推し進めるに至っていない。これらの結果は論文にまとめ Canadian Mathematical Bulletin に採録された ([1])。

参考文献

[1] K. Funano, A universal inequality for Neumann eigenvalues of the Laplacian on a convex domain in Euclidean space, *Canad. Math. Bull.* 67 (2024), no. 1, 222-226.

[2] K. Funano, A note on domain monotonicity for the Neumann eigenvalues of the Laplacian, *Illinois J. Math.* 67 (2023), no. 4, 677-686.

[3] K. Funano and Y. Sakurai, Upper bounds for higher order Poincaré constants, *Trans. Amer. Math. Soc.* 373 (2020), no. 6, 4415-4436.

[4] K. Funano and Y. Sakurai, Concentration of eigenfunctions of the Laplacian on a closed Riemannian manifold, *Proc. Amer. Math. Soc.* 147 (2019), no. 7, 3155-3164.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kei Funano and Yohei Sakurai	4. 巻 373
2. 論文標題 Upper bounds for higher-order Poincare constants	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Transaction of the American mathematical society	6. 最初と最後の頁 4415-4436
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/8049	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kei Funano and Yohei Sakurai	4. 巻 不明
2. 論文標題 Concentration of eigenfunctions of the Laplacian on a closed Riemannian manifold	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 不明
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/14430	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hannah Alpert and Kei Funano	4. 巻 27
2. 論文標題 Macroscopic scalar curvature and areas of cycles	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Geometric and Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 727--743
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00039-017-0417-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Funano Kei	4. 巻 67
2. 論文標題 A note on domain monotonicity for the Neumann eigenvalues of the Laplacian	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Illinois Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 677 ~ 686
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/00192082-10972651	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Funano Kei	4. 巻 67
2. 論文標題 A universal inequality for Neumann eigenvalues of the Laplacian on a convex domain in Euclidean space	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Canadian Mathematical Bulletin	6. 最初と最後の頁 222 ~ 226
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4153/S0008439523000735	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計19件 (うち招待講演 18件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 船野敬
2. 発表標題 A note on domain monotonicity for the Neumann eigenvalues of the Laplacian
3. 学会等名 2022 年度日本数学会東北支部会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 kei funano
2. 発表標題 A 'domain monotonicity' for Neumann eigenvalues of the Laplacian
3. 学会等名 Geometric Analysis in Harmonic Analysis and PDE (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 船野敬
2. 発表標題 Upper bounds for higher-order Poincare constants
3. 学会等名 大阪大学数学教室談話会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 船野敬
2. 発表標題 Upper bounds for higher order Poincaré constants
3. 学会等名 Geometric aspects of solutions to partial differential equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 船野敬
2. 発表標題 Upper bounds for higher order Poincaré constants
3. 学会等名 Analysis and PDEs on Manifolds and Fractals (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 船野敬
2. 発表標題 Upper bounds for higher order Poincaré constants
3. 学会等名 Tohoku-Lorraine Conference 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 船野敬
2. 発表標題 Upper bounds for higher order Poincaré constants
3. 学会等名 福岡大学微分幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 船野敬
2. 発表標題 Upper bounds for higher order Poincaré constants
3. 学会等名 慶応義塾大学幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 船野敬
2. 発表標題 ラブラシアンの固有関数の値の分布について
3. 学会等名 福岡大学微分幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 船野敬
2. 発表標題 固有値の領域単調性・非単調性について
3. 学会等名 スペクトラルグラフ理論および周辺領域（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 船野敬
2. 発表標題 巨視的スカラー曲率について
3. 学会等名 東北大学数学教室談話会（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 船野敬
2. 発表標題 ハムサンドイッチからラプラシアン固有値へ
3. 学会等名 東北大学情報科学研究科談話会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 船野敬
2. 発表標題 巨視的スカラー曲率について
3. 学会等名 東京工業大学幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 船野敬
2. 発表標題 ラプラシアン固有関数の集中について
3. 学会等名 幾何と解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 船野敬
2. 発表標題 Concentration of eigenfunctions of the Laplacian on a closed Riemmanian manifold
3. 学会等名 Ergodic and Geometric Group Theory EGG (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 船野敬
2. 発表標題 A 'domain monotonicity' for Neumann eigenvalues of the Laplacian
3. 学会等名 東北大学幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 船野敬
2. 発表標題 A universal inequality for Neumann eigenvalues of the Laplacian on a convex domain in Euclidean space
3. 学会等名 福岡大学幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 kei funano
2. 発表標題 A universal inequality for Neumann eigenvalues of the Laplacian
3. 学会等名 Geometric Spectral Theory（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 kei funano
2. 発表標題 Two extremum problems for Neumann eigenvalues
3. 学会等名 Tohoku-Lorraine Matching Fund 2022 Projects' Progress Report Meeting（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Kei Funano's homepage https://sites.google.com/site/keifunanoshomepage/ Kei Funano's homepage https://sites.google.com/site/keifunanoshomepage/
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	櫻井 陽平 (Sakurai Yohei)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
United states of America	Auburn university			