

令和 6 年 6 月 4 日現在

機関番号：13801

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2023

課題番号：17K14184

研究課題名（和文）Veech曲面の幾何学

研究課題名（英文）Geometry of Veech surfaces

研究代表者

四之宮 佳彦（Shinomiya, Yoshihiko）

静岡大学・教育学部・講師

研究者番号：40755930

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の目的はVeech曲面の幾何学的性質の解明のために、種数2のVeech曲面について知られている性質の一般種数への拡張をすることである。1つ目の研究成果は一般種数の超楕円的平坦曲面上の単純閉測地線の様相を明らかにしたことである。種数2の場合に知られていた性質を拡張した。2つ目の研究成果はある超楕円的平坦曲面たちの周期行列の表示を与えたことである。特に種数2の場合に明示的な表示を与えた。3つ目は、ある条件による種数3,4の超楕円的平坦曲面の類別である。種数3の場合にその条件によって超楕円的平坦曲面が2種類に分けられることを見出し、それを種数4の場合に拡張した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

1つ目の成果について、証明は種数2の場合とは異なる手法を用いた。種数0の場合の平坦曲面の新たな性質を解明しそれを利用しており、更なる応用が期待できる。2つ目の成果については、超楕円的平坦曲面を一般種数で更にパラメータ付きで扱っている。これまでの周期行列に関する先行研究は個別のリーマン面に対してのものであり、パラメータ付きで周期行列を扱ったことには意義がある。また種数2の場合には周期行列の各成分を多項式で与えていることも重要な点である。3つ目の成果についてはこれまで扱われてこなかった性質の研究である。種数3,4の場合を調べることで今後の更なる性質の解明の足掛かりとなることが期待できる。

研究成果の概要（英文）：This study aims to extend the properties known for Veech surfaces of genus 2 to general genera to clarify geometric properties of Veech surfaces. The first result is the clarification of the aspect of simple closed geodesics on hyperelliptic translation surfaces of general genus. This is an extension of the properties known in the case of genus 2. The second result is that we have indicated the periodic matrices of certain hyperelliptic translation surfaces. In particular, we gave an explicit indication in the case of genus 2. The third is the classification of hyperelliptic translation surfaces of genera 3 and 4 under certain conditions. In the case of genus 3, we found that there are two types of hyperelliptic translation surfaces depending on the conditions, and we extended this to the case of genus 4.

研究分野：函数論

キーワード：平坦曲面 Veech群 周期行列

### 1. 研究開始当初の背景

タイヒミュラー空間の研究において、その測地線に関係する並進曲面、平坦曲面の非常に重要な対象である。並進曲面、平坦曲面の幾何学的性質を解明することでタイヒミュラー空間の性質を知ることができる。また並進曲面、平坦曲面のある種の自己同型群である Veech 群は写像類群の部分群でもあり、こちらも重要な対象であるが具体例の構成は未だ難しい。並進曲面、平坦曲面の幾何学的性質から Veech 群の性質を調べる研究なども存在し、並進曲面、平坦曲面の幾何学的性質の研究は重要である。

本研究では並進曲面の中でも超楕円的なものを扱った。1つ目、3つ目の研究成果が超楕円の並進曲面の幾何学的性質に関するものである。種数 2 の並進曲面はすべて超楕円的であり、様々な研究がなされている。例えば Nguyen [1]は、種数 2 の並進曲面上の特異点を通らない単純閉測地線たちが成す曲線複体を調査した。Nguyen の手法は種数 2 の時にのみ利用できるもので、Nguyen の証明をそのまま一般種数の場合に拡張することはできなかった。他の先行研究についても、種数 2 の場合の特殊性を用いていることが多く、一般種数の超楕円の並進曲面が扱われることはそれほど多くはなかった。そのため、一般種数の超楕円の並進曲面の研究をするための手法を与えることも重要であった。

2つ目の研究成果はリーマン面、代数曲線の周期行列に関するものである。周期行列は函数論や代数幾何学において重要な研究対象である。並進曲面、平坦曲面そのものの研究においても周期行列に関連するものが用いられることがある。しかし周期行列の具体的な例はそれほど多く知られていなかった。種数をパラメータとした代数曲線の周期行列に関する研究は Schindler [2]などで行われていたが、種数を固定して一括して多くの代数曲線の周期行列を研究したものはなかった。例えばパラメータを持っていて変化を観測できるような例はこれまで存在しなかった。

#### (参考文献)

- [1] Duc-Manh Nguyen. Translation surfaces and the curve graph in genus two. *Algebr. Geom. Topol.*, 17(4):2177–2237, 2017.
- [2] Bernhard Schindler. Period matrices of hyperelliptic curves. *Manuscripta Math.*, 78(4):369–380, 1993.

### 2. 研究の目的

本研究の目的は Veech 曲面の幾何学的性質の解明である。特に、種数 2 の Veech 曲面の場合に知られている性質の、一般種数への拡張を目指している。一般に種数 3 以上の並進曲面を扱うのは困難であると考えたため、まずは種数 2 の場合と同じ超楕円的という性質を持つ並進曲面を扱う。特に Nguyen の種数 2 の場合の結果を種数 3 以上に拡張することを目的とし、種数 3 以上の場合にも利用できる新たな手法を開発する。また、並進曲面の周期行列の側面からの研究のために、周期行列を求めることも目的の 1 つである。

### 3. 研究の方法

Nguyen が種数 2 の場合に用いた議論は種数 2 の場合特有のものであるため、一般種数の場合でも利用できる理論を作り出す必要があった。超楕円的並進曲面はすべて種数 0 の平坦曲面の二重被覆である。種数 0 の平坦曲面の性質を調べ、その性質から超楕円的並進曲面の性質を得ていく。特に、種数 0 の平坦曲面に対し、ある特別な三角形分割が構成できることを証明し、それをを用いた議論を行う。また、研究中に得られた種数 3 の場合についての新たな性質があった。種数 2 の場合にはこの性質は見ることができず、種数 3 の場合で新たに現れたその性質がより高い種数の場合にどのようなようになるのかを知るために、種数 4 の場合を扱う。種数 4 の場合が明らかになれば、より高い種数の場合にどのようなようになるのかを予想できる。種数 4 の場合のこの新たな性質を調べる際にも種数 0 の平坦曲面の特殊な三角形分割の議論を用いる。周期行列に関する研究では、まず周期行列を求める対象の超楕円的並進曲面を構成する。この曲面は平面上のある多角形から構成されるものでいくつかの長さの自由度があるものである。次にその曲面に対応する代数方程式を求める。長さの自由度を代数方程式の解のパラメータで表す。周期行列の計算には 1-forms の空間の基底と一次元ホモロジー群のシンプレクティック基底が必要である。一般に超楕円的代数曲線では、その代数方程式から 1-forms の空間の基底は明示できる。更に構成した曲面では一次元ホモロジー群のシンプレクティック基底も明示できるかを調べ、それらを用いて周期行列を記述する。特に種数 2 の場合について、周期行列の対称性などを用いて周期行列の表示の簡素化を試みる。

#### 4. 研究成果

本研究の最初の成果は、「種数  $g$  の超楕円の並進曲面上で、互いに交わらず特異点を通らない単純閉測地線を同時にどれだけとれるのか」という問題の解決である。この問題の解決によって並進曲面上の単純閉測地線たちが成す曲線複体の単体の様相も一部明らかになる。この問題は種数 2 の場合は Nguyen により解決されており、その結果の一般種数への拡張が本研究成果である。拡張のため用いた手法は Nguyen のものとは異なる新たなものである。まずは種数 0 の平坦曲面に特別な三角形分割を構成できることを示した。その三角形分割から問題にある単純閉測地線を、最大個数を実現するように構成した。更に本研究では種数 3 の超楕円の並進曲面がある条件によって 2 種類に分類できることを見出した。これは 3 つ目の研究成果につながるものである。

2 つ目の研究成果は種数  $g$  のある超楕円の並進曲線の族の周期行列を明示したことである。これらの並進曲面は最初の研究の中で見出したもので、平面上の階段状多角形から構成できる。これらの並進曲面に対応する代数方程式を求め、周期行列の計算に必要な 1-forms の成す空間の基底と一次元ホモロジー群のシンプレクティック基底を具体的に与え、それらを用いて周期行列を明示した。また、これらの並進曲面は対応する階段状多角形の辺の長さの自由度もある。これは対応する代数方程式の根の解のパラメータとして表現できる。そのため一般種数の代数曲線を統一的に扱って周期行列を求めたことになる。これまでに知られていた周期行列の計算例はパラメータがなく、個別のものであったことから非常に意義のあるものである。特に種数 2 の場合には、対応する多角形の長さパラメータを用いて、周期行列の各成分を有理関数で表示することができた。

3 つ目の研究成果は 1 つ目の研究の中で見出した、ある条件による種数 3 の超楕円の並進曲面の分類を種数 4 の場合に行ったものである。種数 3 の場合にはある量が 2 になるか 3 になるかで 2 種類に分類される。ほとんどの場合、この量は 3 になるのに対し、特殊な場合にだけ 2 になる。種数 4 の場合、同様の量が 2, 3, 4 のいずれかになる。この量が 2 や 3 になるのが特殊な場合であるが、どのような超楕円の並進曲面でこの量が 2, 3 になるのかをそれぞれ特徴づけた。この結果は更に高い種数の場合にどのようなようになるのかを調べる指標にもなるものである。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

|   |                 |
|---|-----------------|
| 1. 著者名<br>Shinomiya Yoshihiko                                     | 4. 巻<br>-       |
| 2. 論文標題<br>Period matrices of some hyperelliptic Riemann surfaces | 5. 発行年<br>2023年 |
| 3. 雑誌名<br>manuscripta mathematica                                 | 6. 最初と最後の頁<br>- |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1007/s00229-023-01462-x             | 査読の有無<br>有      |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている（また、その予定である）                             | 国際共著<br>-       |

〔学会発表〕 計16件（うち招待講演 8件 / うち国際学会 1件）

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Yoshihiko Shinomiya  |
| 2. 発表標題<br>Flat structures on Riemann surfaces  |
| 3. 学会等名<br>Workshop: Quasi-conformal mappings, hyperbolic geometry and Riemann surfaces |
| 4. 発表年<br>2023年   |

|                                |
|--------------------------------|
| 1. 発表者名<br>Yoshihiko Shinomiya |
| 2. 発表標題<br>L-shapeの周期行列        |
| 3. 学会等名<br>沼津改め静岡研究会           |
| 4. 発表年<br>2023年                |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Yoshihiko Shinomiya   |
| 2. 発表標題<br>Period matrices of some hyperelliptic Riemann surfaces                |
| 3. 学会等名<br>RIMS Workshop Geometry of discrete groups and hyperbolic spaces（招待講演） |
| 4. 発表年<br>2021年～2022年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Yoshihiko Shinomiya                                    |
| 2. 発表標題<br>Period matrices of some hyperelliptic Riemann surfaces |
| 3. 学会等名<br>2021年度 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」(招待講演)                     |
| 4. 発表年<br>2021年～2022年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Yoshihiko Shinomiya                                    |
| 2. 発表標題<br>Period matrices of some hyperelliptic Riemann surfaces |
| 3. 学会等名<br>東工大複素解析セミナー(招待講演)                                      |
| 4. 発表年<br>2021年～2022年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Yoshihiko Shinomiya                                    |
| 2. 発表標題<br>Period matrices of some hyperelliptic Riemann surfaces |
| 3. 学会等名<br>静岡複素解析幾何セミナー   |
| 4. 発表年<br>2021年～2022年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Yoshihiko Shinomiya                                    |
| 2. 発表標題<br>Period matrices of some hyperelliptic Riemann surfaces |
| 3. 学会等名<br>研究集会「Riemann surfaces and related topics」(招待講演)        |
| 4. 発表年<br>2021年～2022年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Yoshihiko Shinomiya   |
| 2. 発表標題<br>Period matrices of some hyperelliptic Riemann surfaces  |
| 3. 学会等名<br>Workshop: Quasi-conformal mappings, geodesic laminations and flat structures on Riemann surfaces (招待講演) |
| 4. 発表年<br>2021年～2022年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Yoshihiko Shinomiya                                    |
| 2. 発表標題<br>Period matrices of some hyperelliptic Riemann surfaces |
| 3. 学会等名<br>日本数学会 2022年度年会   |
| 4. 発表年<br>2021年～2022年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>四之宮佳彦   |
| 2. 発表標題<br>Simple closed geodesics on hyperelliptic translation surfaces |
| 3. 学会等名<br>リーマン面に關連する位相幾何学2020 (招待講演)                                    |
| 4. 発表年<br>2020年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>四之宮佳彦   |
| 2. 発表標題<br>Simple closed geodesics on hyperelliptic translation surfaces |
| 3. 学会等名<br>日本数学会2019年度秋季総合分科会  |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>四之宮佳彦   |
| 2. 発表標題<br>Simple closed geodesics on hyperelliptic translation surfaces |
| 3. 学会等名<br>関数論若手勉強会 at 金沢  |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>四之宮佳彦   |
| 2. 発表標題<br>Simple closed geodesics on hyperelliptic translation surfaces |
| 3. 学会等名<br>2019年度「リーマン面・不連続群論」研究集会（招待講演）                                 |
| 4. 発表年<br>2020年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>四之宮佳彦   |
| 2. 発表標題<br>Simple closed geodesics on hyperelliptic translation surfaces |
| 3. 学会等名<br>研究集会「タイヒミュラー空間と双曲幾何学」～奥村善英先生の追悼集会～                            |
| 4. 発表年<br>2020年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>四之宮 佳彦  |
| 2. 発表標題<br>Simple closed geodesics on hyperelliptic translation surfaces |
| 3. 学会等名<br>Beltrami方程式勉強会 Part II（招待講演）                                  |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>四之宮 佳彦  |
| 2. 発表標題<br>Simple closed geodesics on hyperelliptic translation surfaces             |
| 3. 学会等名<br>Workshop on Holomorphic maps, Pluripotentials and Complex Geometry (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年  |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| 氏名<br>(ローマ字氏名)<br>(研究者番号) | 所属研究機関・部局・職<br>(機関番号) | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
|                           |                       |    |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|         |         |