

令和 4 年 9 月 8 日現在

機関番号：13901

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K14186

研究課題名(和文)コンパクト四次元双曲多様体はシンプレクティック構造を持つか？

研究課題名(英文) Does a compact hyperbolic 4-manifold have a symplectic structure?

研究代表者

松尾 信一郎 (Matsuo, Shinichiroh)

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：40599487

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,800,000円

研究成果の概要(和文)：指数の局所化の射程を探った。

第一は、境界付き多様体の指数とドメインウォールフェルミオンとの関係を、物理の格子ゲージ理論に触発され、研究した。その結果、APS指数をドメインウォールフェルミオンのエータ不変量で表す公式を得た。これらの公式のmod 2指数や複素フェルミオンへの拡張も研究した。

第二は、反自己双対計量のモジュライ空間の向き付け可能性を判定するためのKR指数の計算である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

指数定理と格子ゲージ理論を架橋し、Atiyah-Patodi-Singerの指数定理の格子ゲージ理論的定式化に道を開いた。さらに、指数の局所化の射程を探った。第一に、境界付き多様体の指数とドメインウォールフェルミオンとの関係を、物理の格子ゲージ理論に触発され、研究したことがある。その結果、APS指数をドメインウォールフェルミオンのエータ不変量で表す公式を得た。これらの公式のmod 2指数や複素フェルミオンへの拡張も研究した。第二に、反自己双対計量のモジュライ空間の向き付け可能性を判定するためのKR指数の計算がある。

研究成果の概要(英文)：We have investigated the scope of Witten localisation techniques:

First, we studied the relation between the index on manifolds with boundary and domain wall fermions, inspired by lattice gauge theory; and we derived a formula expressing the Atiyah-Patodi-Singer index in terms of the eta invariants of domain wall fermion Dirac operators. We also studied mod 2 extensions.

Second, we have studied the orientation of moduli spaces of anti-self-dual metrics.

研究分野：幾何解析

キーワード：幾何解析

## 1. 研究開始当初の背景

本研究計画には二つの背景がある。一つはザイバーク=ウィッテン理論における代表者の研究であり、もう一つはコンパクト四次元双曲多様体のケーラー構造についての観察である。

まずは一つの背景を説明する。代表者はこれまで四次元多様体論におけるザイバーク=ウィッテン (Seiberg-Witten) 方程式の微分幾何への応用を研究してきた。SW 方程式とはディラック作用素に関する偏微分方程式と曲率に関する偏微分方程式の連立方程式であって、その解のモジュライ空間のコンパクト性を著しい特徴とし、ポッホナー=ヴァイツェンベック公式を介して微分幾何への応用がある。代表者のこれまでの研究で本研究計画と関係が深いのは、論文 (Furuta-Matsuo, JMSJ 68 (2016) 1-14) において導入された SW 方程式の新しい摂動である。この論文では、ディラック作用素のポッホナー=ヴァイツェンベック公式を出発点として SW 方程式と等価な方程式が得られることを示し、SW 方程式の解のモジュライ空間のコンパクト性に全く新しい証明を与えた。この摂動をさらに研究する中で、自己双対調和 2-形式のノルムにより共形変換された特異リーマン計量の導入に至った。この特異リーマン計量による SW 方程式に対する形式的な考察により、代表者はコンパクト四次元双曲多様体の SW 不変量は自明であるとの予想に導かれた。さらに、ディブス多様体など具体的な四次元双曲多様体での計算によりこの予想は確認された。

もう一つの背景は次である。エンリケス=小平の複素曲面の分類理論と調和写像の理論により、コンパクト四次元双曲多様体はコンパクト複素曲面とホモトピー同値になることはないとわかる。特に、コンパクト四次元双曲多様体にはいかなるケーラー構造も入らない。ケーラー構造とは可積分シンプレクティック構造のことであり、従って、コンパクト四次元双曲多様体にはいかなる可積分シンプレクティック構造も入らない。さらに、アームストロングの結果 (Quart. J. Math. Oxford 1997) により、コンパクト四次元双曲多様体にはその双曲計量に整合的なシンプレクティック構造が入らない。これらの結果を踏まえ、コンパクト四次元双曲多様体にはいかなるシンプレクティック構造も入らないと予想するのは自然である。また、タウベスの結果により、コンパクト四次元シンプレクティック多様体の SW 不変量は非自明である。従って、コンパクト四次元双曲多様体の SW 不変量が自明であることが示されれば、系として、コンパクト四次元双曲多様体にはシンプレクティック構造が入らないとわかる。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、コンパクト四次元双曲多様体にはシンプレクティック構造が入らないことをザイバーク=ウィッテン理論により証明することにある。そのために、コンパクト四次元双曲多様体のザイバーク=ウィッテン不変量の消滅定理を証明する。

## 3. 研究の方法

ザイバーク=ウィッテン (Seiberg-Witten) 不変量とは、コンパクト四次元有向閉多様体の微分同相不変量であり、SW 方程式の解のモジュライ空間の上の交叉理論により定義される。コンパクト四次元有向多様体  $X$  の SW 不変量は  $X$  上の Spinc 構造の全体を  $\text{Spinc}(X)$  とするとき、適当な技術的仮定の下で、写像

$$\text{SW} : \text{Spinc}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

として与えられる。本研究計画の最大の目的は、コンパクト四次元双曲多様体の SW 不変量の消滅定理、すなわち、もしもコンパクト四次元有向多様体  $X$  が負の定曲率計量を許容するならば、 $X$  の SW 不変量  $\text{SW} : \text{Spinc}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  が写像としてゼロ写像であると示すことにある。その証明のために特異計量に対する SW 方程式の理論を構築する。 $(X, g)$  をコンパクト四次元有向多様体として、 $g$  を自己双対調和 2-形式とする。このとき、本研究計画では、 $g$  のノルムにより共形変換された特異計量  $g' := |g|g$  に注目する。 $g'$  の零点に沿って  $g'$  には特異性がある。零点を持たない自己双対調和 2-形式とは、本質的には、 $g$  に整合的なシンプレクティック形式と同じことである。従って、 $X$  にシンプレクティック構造が入るかどうかと  $g'$  の特異性とは関係がある。また、 $g'$  の零点 (nodal set) の解析により、特異計量  $g'$  のスカラー曲率  $R(g')$  を定義することができる。さらに、特異計量  $g'$  に対するアインシュタイン=ヒルベルト汎関数  $E(g')$  も考えることができる。さらに、

- $X$  の SW 不変量  $\text{SW}$  は、特異計量  $g'$  を用いても計算することができる。
- $\text{SW}X$  が非自明であれば、定数  $c_1$  と自己双対調和 2-形式  $g'$  が存在して、 $E(g') < c_1$  とな

る.(ここに特異計量の SW 方程式の考察を使う.)

・  $X$  が双曲多様体のとき, 定数  $c_2$  が存在して, 自己双対調和 2-形式  $\omega$  に対して  $E(g') \geq c_2$  となる.

・  $c_1 < c_2$  を示す.(よって, コンパクト四次元双曲多様体の SW 不変量は自明となる.)

#### 4. 研究成果

当初の計画は大幅に変更され, 実際には, ザイバーク=ウィッテン方程式の差分化の考察を行った. その結果 格子ゲージ理論と指数の関係について研究することになった. 研究成果としては, 境界付き多様体の指数とドメインウォールフェルミオンの関係の考察により, APS 指数をドメインウォールフェルミオンのエータ不変量で表す公式を得た. これらの公式の mod 2 指数や複素フェルミオンへの拡張も研究した. さらに, 反自己双対計量のモジュライ空間の向き付け可能性を判定するための KR 指数の計算への応用も得た.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Fukaya Hidenori, Furuta Mikio, Matsuo Shinichiroh, Onogi Tetsuya, Yamaguchi Satoshi, Yamashita Mayuko	4. 巻 380
2. 論文標題 The Atiyah-Patodi-Singer Index and Domain-Wall Fermion Dirac Operators	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1295 ~ 1311
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-020-03806-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 8件 / うち国際学会 6件）

1. 発表者名 松尾信一郎
2. 発表標題 境界付き多様体の Atiyah-Patodi-Singer の指数とドメインウォールフェルミオン
3. 学会等名 東大数理 トポロジー火曜セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 松尾信一郎
2. 発表標題 Atiyah-Patodi-Singerの指数定理とドメインウォールフェルミオンの数学
3. 学会等名 Summer School 数理物理 2020 指数定理の数理（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 松尾信一郎
2. 発表標題 The Atiyah-Patodi-Singer index and domain-wall fermion Dirac operators
3. 学会等名 The Eighth Pacific Rim Conference in Mathematics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 松尾信一郎
2. 発表標題 The Atiyah-Patodi-Singer index theorem and domain walls
3. 学会等名 NTTI 2019 and BEC 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松尾 信一郎
2. 発表標題 Scalar curvature and the twisted Seiberg-Witten equation
3. 学会等名 The Joint International Meeting of the Chinese Mathematical Society and the American Mathematical Society (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松尾 信一郎
2. 発表標題 Asymptotic volume growth of the instanton moduli spaces over the four-sphere
3. 学会等名 Gauge theory and applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shinichiroh Matsuo
2. 発表標題 Scalar curvature and the twisted Seiberg-Witten equations
3. 学会等名 PRIMA third congress at Oaxaca, Mexico (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shinichiroh Matsuo
2. 発表標題 Brody curves and mean dimension
3. 学会等名 Mean Dimension and Sofic Entropy Meet Dynamical Systems, Geometric Analysis and Information Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

松尾信一郎のホームページ  
<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~shinichiroh/>

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------