様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　５ 月　８ 日現在

機関番号：３７１１１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2017～2022
課題番号：１７Ｋ１４１９１

研究課題名（和文）凸体の輻射中心を用いた交差体の凸性の研究

研究課題名（英文）Study on the convexity of intersection bodies of a convex body with radial centers

研究代表者
坂田　繁洋（Sakata, Shigehiro）

福岡大学・理学部・准教授

研究者番号：３０７３２９３７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の対象は、Euclid空間内の交差体とよばれる星体である。交差体は星体から作られる。凸体の交差体は凸とは限らない。Busemannの定理「原点対称な凸体の交差体は凸である」が知られている。本研究の目的の1つは原点対称でない凸体から凸な交差体を構成することである。
本研究では次を示した。Lを星体とし、その動径関数は2回連続微分可能とする。Kを、Lと原点を中心とする球との動径和とする。この球の半径が十分大きいならば、KとKの交差体は凸になる。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究はBusemann-Pettyの問題に由来する。Busemann-Pettyの問題の心は「2つの凸体の体積は、平面による切り口の面積によって比べられるか」であり、凸幾何学の逆問題(geometric tomography)における中心的課題の1つとなっている。Busemann-Pettyの問題の解は凸な交差体であることが知られている。そのため、凸な交差体の構成は重要な課題である。
本研究では、凸な交差体の新しい構成方法を提示した。本研究成果の応用例として、Busemann-Pettyの問題の解の具体的な構成が期待される。

研究成果の概要（英文）：The setting of this research is in the Euclidean space, and the object is an intersection body. An intersection body is a star body made from a star body. In general, the intersection bodies of a convex body containing the origin is not convex. Busemann’s theorem states that the intersection body of any centered convex body is convex. We are interested in how to construct convex intersection bodies from convex bodies without any symmetry (especially, central symmetry).
We showed the following. Let L be a star body such that its radial function is twice continuously differentiable. Let K be the radial sum of L and a centered ball. If the radius of the ball is “large enough”, then K and the intersection body of K are convex.

研究分野：幾何学

キーワード：凸体　交差体　凸性　Busemannの定理　Busemann-Pettyの問題

様 式 C－１９、F－１９－１、Z－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

(1) 本研究はBusemann-Pettyの問題(文献②)に由来する。Busemann-Pettyの問題とは「K，Lをn次元Euclid空間内の原点対称な凸体(有界な開集合の閉包で凸なもの)とする。原点を通る任意の超平面Hに対して，KとHとの共通部分のn-1次元体積は，LとHとの共通部分のn-1次元体積を超えないと仮定する。このとき，Kの体積はLの体積を超えないか」である。この問題は凸幾何学の逆問題(geometric tomography)において中心的課題の１つとなっている。

Busemann-Pettyの問題は5次元以上の場合に反例が挙がっている。Lutwakにより，交差体とよばれる星体(有界な開集合の閉包で原点に関して星形のもの)が導入され，定理「Kが凸な交差体ならば，Busemann-Pettyの問題は肯定的に成り立つ」が示された(文献⑤)。GardnerとZhangにより，同時期に独立に，定理「Busemann-Pettyの問題が肯定的に成り立つための必要十分条件は，原点対称な凸体は交差体である」が示された(文献③，⑧)。

交差体は星体から作られる。星体Aから交差体を作る際，Aと原点を通る超平面との共通部分のn-1次元体積を用いる。星体Aが交差体であるとは，ある星体A’が存在して，AがA’の交差体であることをいう。交差体は原点対称である。凸体の交差体は凸とは限らない。凸な交差体は，Busemann-Pettyの問題の解であるから，その構成は重要な課題である。

凸な交差体の構成として，Busemannの定理「原点対称な凸体の原点における交差体は凸である」が知られている(文献①)。交差体の形状に関する研究成果は，他にもいくつか知られているが，本研究の計画時点で，結論が凸であるものはBusemannの定理の他に見当たらなかった。

(2) 交差体の凸性に関連して，凸体の中心の研究が挙げられる。原点対称でない凸体の交差体は凸とは限らないことを動機として，Moszyńskaは凸体の「良い」原点の位置を探す研究を開始した(文献⑥)。Moszyńskaは，試みとして，凸体Kの点xにおけるp次の双対体積(Kとxを通るp次元affine空間との共通部分のp次元体積の平均)を最大にするxを，Kのp次の輻射中心とよび，その性質を研究した。定義から，双対体積と輻射中心の次数pは1以上n-1以下の整数だが，pが正の実数であれば，それらの定義の式が意味をもつので，双対体積と輻射中心の次数pは正の実数とする。ただし，pがnより大きいとき，双対体積を最小にするxを輻射中心とよぶ。輻射中心について，その存在と一意性，Hausdorff距離に関する連続性など，基本的な性質は考察されていたが，本研究の計画時点で，輻射中心と凸体の形状との関係は考察されていなかった。

２．研究の目的

(1) 本研究の大きな目的は，原点対称とは限らない凸体から凸な交差体を構成することであった。本研究の計画時点で唯一の手掛かりであったBusemannの定理を基に，課題「原点対称な凸体Sが与えられるごとに，交差体が凸になるようなSの近傍を与えよ」の解決を目的の１つとした。

(2) 本研究の計画時に，数式処理ソフトを用いて，平面上の原点を中心とした正三角形△の平行体(外側法方向へ膨らませたもの)とその交差体を描画した。半径(膨らませる幅)を大きくすると，△の平行体は円板のような形になり，その交差体も凸になった。また，半径が小さいと，その交差体は凸でなかった。これを基に，問題「Kを，原点含む凸体Lの平行体とし，半径を十分大きくとれば，Kの交差体は凸になるか」の解決を目的の１つとした。加えて，問題「Kの交差体が凸になるような半径の下限は，原点とLの輻射中心との距離に関して狭義単調減少か」の解決も視野に入れた。

(3) 並行して，交差体と輻射中心に関係する凸幾何学・解析学の研究成果を広く収集し，種々の問題の解決と独創的な研究の展開を志した。

３．研究の方法

(1) 本研究の計画時に参照した文献を，証明も含めて理解しようとした。特に，Gardner氏の教科書(文献④)の第8章を熟読し，Busemannの定理の証明を自分のものにした。研究開始時点に手元にあった文献に引用されていた文献を購入し，それらの理解も試みた。文献から得た知識・計算方法を用いて，自身で問題解決を思考した。

(2) 凸体の交差体の凸性を導くために，凸体の超平面による切り口の面積を評価する必要がある。切り口の面積は積分で与えられ，その評価は自明でない。数式処理ソフトを用いて複数の具体例を計算し，自身の計算の妥当性を確認することで，研究の効率を上げられた。

(3) 凸幾何学を主題とした国際研究集会に参加し，研究発表を聞くことで，問題解決に有益な情報を収集できた。研究集会の参加者と討論することで，読むべき文献を知り，問題解決に使える計算手法も学べた。

(4) 輻射中心の研究について，Irmina Herburt 氏(ワルシャワ工科大学)と討論した。Herburt 氏は Moszyńska 氏と交流があり，輻射中心の研究に寄与している。問題意識を共有でき，有意義な議論を行えた。また，Herburt 氏にポーランドの凸幾何学の研究者を紹介してもらい，輻射中心の研究成果について多くの意見をもらえた。

４．研究成果

(1) 交差体の凸性について，大きく 2 つの成果を得た。これらの成果を学術論文の形にし，査読付き学術雑誌へ投稿した。

(I) A を，原点を含む「強く凸」な体(有界な開集合の閉包)とする。A の動径関数は 2 回連続微分可能と仮定する。このとき，次の 2 つが成り立つ。

(I-1) A の動径関数と 2 回連続微分可能な十分小さい関数との和を動径関数とする星体は凸である。

(I-2) (I-1)の凸体の交差体は凸である。

(II) A を，星体とする。A の動径関数は 2 回連続微分可能と仮定する。このとき，次の 2 つが成り立つ。

(II-1) 正の数 R を十分大きくとると，A の動径関数と R との和を動径関数とする星体は凸である。

(II-2) (II-1)の凸体の交差体は凸である。

(I)の A の「強い凸性」について補足する。星体 A が凸になるための必要十分条件は A の動径関数の不等式で記述される。A の境界が平坦な部分をもつとき，この不等式の等号が成り立つ。A の「強い凸性」は，この不等式を用いて定義される。球はここでの「強い凸性」をみたす。したがって，(I-2)から「球の十分小さな変形の交差体は凸である」が従う。(I-2)は研究の目的(1)で掲げた課題への解答といえる。

(II)は研究の目的(2)で提示した問題に取り組んだ結果である。当初，凸体を外側法方向へ膨らませたものを考える予定だったが，技術的に難しく，問題の修正を模索した。文献調査により，凸体を外側動径方向へ膨らませたものならば，超平面による切り口の面積の計算が(相対的に)簡単になり，肯定的成果につながった。

(2) 関連する研究として，Herburt 氏と共同で，凸多角形の双対体積の極値問題を考察した。p を 0 より大きく 2 以下の実数とし，定理「原点を中心とする円板 D に含まれる凸 k 角形 P の p 次の双対体積の原点における値が最大になるための必要十分条件は，P が D に内接する正凸 k 角形である」を示した。双対体積の次数 p が 0 以下の場合には，双対体積の有限部分を取り出し，原点を内部に含む P に対して，同様の定理を示した。双対体積の次数 p が 2 より大きい場合には，以下を示した。

(i) p が 2 より大きく 4 より小さいならば，D に内接する正三角形は双対体積の原点における値を局所最大にする。

(ii) p が 4 のとき，D に内接する正三角形は双対体積の原点おける値の局所最大も局所最小も与えない。

(iii) p が 4 の十分小さい右側近傍に含まれるならば，D に内接する正三角形は双対体積の原点における値を局所最小にする。

(iv) p が 5 以上の各整数の十分小さい近傍に含まれるならば，D に内接する正三角形は双対体積の原点における値を局所最小にする。

(3) 輻射中心と凸体の形状との関係についても考察した。特に，三角形の輻射中心を考察した。三角形の輻射中心の位置を，三角形の辺と角だけを用いて記述した。それを用いて，定理「内心と輻射中心が等しい三角形は正三角形に限る」，「外心と輻射中心が等しい三角形は正三角形に限る」を示した。輻射中心は重心を含む一助変数族であるから，得た 2 つの定理は，それぞれ，初等幾何の定理「内心と重心が等しい三角形は正三角形に限る」，「外心と重心が等しい三角形は正三角形に限る」の一般化といえる。定理「すべての次数の輻射中心が等しい三角形は正三角形に限る」も示した。

(4) 輻射中心は双対体積の最大点であった。すなわち，輻射中心は関数の最大点である。この方針の研究として，若杉勇太氏(広島大学)と共同で，全空間における消散型波動方程式の解の空間最大点を考察した。初期位置はコンパクトな台をもつ滑らかな非負値関数とし，初期位置と初速の和は零とする(初期位置と初速の和が消えない場合は文献⑦で解決していた)。このとき，解の空間最大点は，初期位置の台から時刻変数の平方根の速さで空間遠方に逃げることを示した。また，解の空間最小点は，初期位置の重心に収束することを示した。

＜引用文献＞

① H. Busemann, A theorem of convex bodies of the Brunn-Minkowski type, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 35 (1949), 27-31.
② H. Busemann and C. M. Petty, Problems on convex bodies, Math. Scand. 4 (1956), 88-94.
③ R. J. Gardner, Intersection bodies and the Busemann-Petty problem, Trans. Amer. Math. Soc. 342 (1994), no. 1, 435-445.
④ R. J. Gardner, Geometric Tomography, Second edition, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 58, Cambridge University press, 2006.
⑤ E. Lutwak, Intersection bodies and dual mixed volumes, Adv. Math. 71 (1988), 232-261.
⑥ M. Moszyńska, Looking for selectors of star bodies, Geom. Dedicata, 81 (2000), 131-147.
⑦ S. Sakata and Y. Wakasugi, Movement of time-delayed hot spots in Euclidean space, Math. Z. 285 (2017), 1007-1040.
⑧ G. Y. Zhang, Centered bodies and dual mixed volumes, Trans. Amer. Math. Soc. 345 (1994), no. 2, 777-801.

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計5件（うち査読付論文　0件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Sakata Shigehiro	4．巻 159
2．論文標題 Stationary radial centers and symmetry of convex polytopes	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Colloquium Mathematicum	6．最初と最後の頁 91～106
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4064/cm7712-11-2018	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 ―

1．著者名 Sakata Shigehiro、Wakasugi Yuta	4．巻 40
2．論文標題 Movement of time-delayed hot spots in Euclidean space for a degenerate initial state	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems - A	6．最初と最後の頁 2705～2738
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/dcds.2020147	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 ―

1．著者名 Herburt Irmina、Sakata Shigehiro	4．巻 21
2．論文標題 An extremum problem for the power moment of a convex polygon contained in a disc	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Advances in Geometry	6．最初と最後の頁 599～609
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/advgeom-2021-0021	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 ―

1．著者名 Sakata Shigehiro	4．巻 200
2．論文標題 Analytic characterization of equilateral triangles	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -)	6．最初と最後の頁 2191～2212
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10231-021-01075-9	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 ―

1．著者名 Sakata Shigehiro	4．巻 170
2．論文標題 Euclidean geometric description of radial centers of a triangle	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Colloquium Mathematicum	6．最初と最後の頁 275～288

掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4064/cm8493-12-2021	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計9件（うち招待講演　8件／うち国際学会　2件）

1．発表者名 Shigehiro Sakata
2．発表標題 Characterization of regular triangles in terms of critical points of Riesz potentials
3．学会等名 Convex, Discrete and Integral Geometry（国際学会）
4．発表年 2017年

1．発表者名 坂田繁洋
2．発表標題 ポテンシャルの臨界点と凸多角形の対称性
3．学会等名 幾何セミナー(熊本)（招待講演）
4．発表年 2017年

1．発表者名 坂田繁洋
2．発表標題 関数の最大点と凸体の対称性
3．学会等名 第64回幾何学シンポジウム（招待講演）
4．発表年 2017年

１．発表者名 坂田繁洋
２．発表標題 Symmetry of a triangle and critical points of Riesz potential
３．学会等名 首都大学東京幾何セミナー（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Shigehiro Sakata
２．発表標題 Critical points of Riesz potentials and characterization of regular triangles
３．学会等名 Seminarium "Geometria Przestrzeni Banach"（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 坂田繁洋
２．発表標題 凸多角形のモーメントの極値問題
３．学会等名 福岡大学微分幾何セミナー（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 坂田繁洋
２．発表標題 距離核ポテンシャルの臨界点による正三角形の特徴づけ
３．学会等名 第66回幾何学シンポジウム（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 坂田繁洋
２．発表標題 凸体のRieszポテンシャル，中心，切り口と影
３．学会等名 福岡大学微分幾何研究集会2019（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 坂田繁洋
２．発表標題 距離核ポテンシャルの臨界点と正三角形の特徴づけ
３．学会等名 広島数理解析セミナー・冬の研究会2020（招待講演）
４．発表年 2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Shigehiro Sakata's page https://sites.google.com/site/shigehirosakata/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	ヘルブルト　イルミーナ (Herburt Irmina)	ワルシャワ工科大学・Faculty of Mathematics and Information Science・Professor	

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ポーランド	ワルシャワ工科大学			