

令和 6 年 6 月 3 日現在

機関番号：24405

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2023

課題番号：17K14192

研究課題名（和文）埋め込み解析とホモトピー代数を用いた埋め込みの空間の研究

研究課題名（英文）Study of embedding spaces using the embedding calculus and homotopical algebra

研究代表者

森谷 駿二 (Moriya, Syunji)

大阪公立大学・数学研究所・特別研究員

研究者番号：40583464

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）：筆者は多様体の中の結び目のなす空間のコホモロジーに収束する新しいスペクトル系列を構成した。このスペクトル系列は、これまでのものに比べ、 E_1 -項と d_1 -微分が代数的に記述できるという利点がある。このスペクトル系列を用いて、結び目のなす空間のコホモロジーの次数が低い部分を計算した。また、単連結な4次元多様体の中の結び目の空間に基本群に関するArone-Szymikの問題を部分的に解決した。また、上記のスペクトル系列の構成を応用して、Sinhaのスペクトル系列という、この分野で重要なスペクトル系列の高次微分をいくつか計算した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

埋め込みの空間はホモトピー論では基本的な研究対象であり、特に結び目は数理物理にも現れ、遍在的な対象である。本研究は、そのような重要な研究対象に対して、Atiyah双対性(またはDold-Puppe双対性)という、この分野ではこれまで使われていなかった概念を用いて新しい計算結果を得たことに意義がある。また、この双対性を用いてSinhaのスペクトル系列について得た結果は、現在は余次元1という簡単な場合についてのみであるが、今後余次元が高い場合への応用が見込め、Vassilievの予想への一つのアプローチを与える可能性がある。

研究成果の概要（英文）：I constructed a spectral sequence converging to the space of knots in a manifold.

Comparing to those constructed before, this spectral sequence has the merit that its E_1 -page and d_1 -differential can be algebraically described. Using this spectral sequence, I computed low-degree parts of the cohomology of the knot space and also partially solved a problem by Arone-Szymik about the fundamental group of the space of knots in a simply connected 4-dimensional manifolds. I also computed some higher differentials of Sinha's spectral sequence which is fundamental in this research area.

研究分野：代数トポロジー

キーワード：埋め込み解析

1. 研究開始当初の背景

この研究の開始当初、Goodwillie-Weiss が考案した埋め込み解析(embedding calculus)の埋め込みの空間のコホモロジーの計算への応用が盛んに研究されていた。初期の興味深い応用は Lambrechts-Turchin-Volić による十数年間未解決であった Vassiliev の予想の余次元 3 以上の場合の解決である。彼らは、埋め込み解析と小円盤オペラッドの形式性(formality)を組み合わせることでこの予想を証明した。ただ、当時の応用は多様体からユークリッド空間への埋め込みのなす空間に関する研究が中心であり、値域が一般の多様体の場合はほとんど研究されていなかった。また、当時筆者(森谷)は境圭一氏との共同研究で、long knot の分類空間の幾何学的表示に関する Mostovoy の問に関して肯定的な答えを与えていた。

2. 研究の目的

本研究の目的の一つは、それまで研究されてこなかった一般の多様体を値域とする埋め込みの空間を埋め込み解析とオペラッドを用いて研究することである。より具体的に述べると、一般の埋め込みの空間の、有理ホモトピー論の意味での代数的モデルの構築すること、及びそれを用いてスペクトル系列を構成し、有理ホモトピー不変量の計算に応用することである。もう一つの研究の目的は、long knot の分類空間幾何学的表示に対して、Goodwillie-Weiss の収束定理がどの程度成立するかを検証することである。

3. 研究の方法

研究方法は当初想定していたものと結果的に大きく異なるものとなった。その理由は、埋め込みの空間の代数的モデルの構築において重要な枠付き小円盤オペラッドの代数的モデルを構成した論文が他の研究者によって公開されたことにある。この論文は筆者には難解であり、筆者は有理数体上の代数的モデルに的を絞って他の研究者と競争するよりも、正標数まで含めて研究した方がよいのではないかと考えるようになった。そこで、まず埋め込みの空間の定義域が(1次元)円周の場合、すなわち「多様体の中の結び目の空間」に絞って計算に応用できるスペクトル系列の構成を目的として研究した。研究は、当初の計画より空間レベルの手法に依拠するようになった。主要な新しいアイデアは、Atiyah 双対性(または Dold-Puppe 双対性)を埋め込み解析と組み合わせる、というものである。より正確には、Cohen による Atiyah 双対性の精密化を用いた。埋め込み解析は埋め込みの空間を配置空間の図式に分解するが、この双対性を用いることによってこの配置空間の図式(のホモロジカルな情報)をさらに簡単な空間の図式に分解することができる。

これを用いてスペクトル系列の構成などを行った。

4. 研究成果

本研究では、多様体の中の結び目のなす空間のコホモロジー群に収束するようなスペクトル系列を構成した。同じコホモロジー群に収束するスペクトル系列として、先行して Sinha によって考案されたものがあったが、この Sinha によるスペクトル系列は、E_1 ページですら一般的に計算するのは困難である。それに比べて、筆者が構成した系列は、E_1 ページと d_1 微分が代数的に記述できるものであり、ある程度代数的な計算のみで結び目の空間のコホモロジーに関する情報を得ることができる。実際このスペクトル系列を用いて、多様体が球面の直積の場合にコホモロジーの次数が低い部分を計算した。さらに、この系列を用いて Arone-Turchin によって提起された、多様体の中の結び目の空間の基本群に関する問題を、部分的に解決した。また、筆者のスペクトル系列の背後には対称スペクトラムがあるため、今後コホモロジー作用素を付加することができると思われ、そうなると計算可能性はより高くなると考えられる。この研究に関する論文は査読付き雑誌`Algebraic & Geometric Topology`に掲載された。

このスペクトル系列の構成において、上の「研究の方法」でも述べたように、Atiyah 双対性の Cohen による精密化を用いている。この双対性は、Poincaré 双対性の安定ホモトピー的な定式化と考えられる。通常の(特異コチェインを用いた)Poincaré 双対性はチェインレベルでは交叉積などの相性が必ずしも良いとは言えないため、この双対性を用いた。元々、Cohen もそのような理由でこの精密化を導入したのだが、Cohen の論文には複数の誤りがあり、筆者はそれを修正する下記の論文も執筆した。

Syunji Moriya, On Cohen-Jones isomorphism in string topology, arXiv:2003.03704

(現在査読中。) この論文と、上記のスペクトル系列を導入した論文によって、Cohen による Atiyah 双対性の精密化の重要性を関連分野の研究者に例示することができたのではないかと考えている。実際、筆者の論文が出た後に Malin によって Atiyah 双対性の stable Taylor tower への応用が与えられている。

このスペクトル系列の構成を行った後、筆者は一般の多様体の中の結び目の空間よりも、より

基本的な long knot の空間に絞って研究することにした。Long knot の空間のコホモロジーは有理数体上では埋め込み解析の応用という意味ではよく研究されているといえるが、正標数では一般的な結果としては Boavida-Horel によるものがあるのみで、未知の部分が多い。Atiyah 双対性を介して得られる筆者の ``Thom 空間モデル” を用いれば、long knot の空間に関する Sinha のスペクトル系列の元や高次微分を簡単な写像を用いて記述できることに気づき、この利点を生かして正標数での Sinha のスペクトル系列を研究しようと考えた。この Sinha のスペクトル系列が注目される理由の一つは、それが Vassiliev のスペクトル系列とよく似ていることである。Vassiliev の系列は、(通常の 3 次元空間の中の) 結び目理論で幅広く研究されている有限型不変量の発見にもつながったもので、この系列に関して Vassiliev は E_1 ページで退化するだろうと予想している。この予想は、有限型不変量との関連で最も注目されていた余次元 2、対角部分については Kontsevich により肯定的に解決されており、また余次元 3 以上の場合は系列全体で Lambrechts-Turchin-Volić によりやはり肯定的に解決されている。(この余次元 3 以上の場合の証明に Sinha の系列が用いられた。) ただし、これらはすべて標数 0 の場合の話で、正標数の場合の Vassiliev の予想はほとんどの部分で未解決である。筆者はこの正標数での Vassiliev の予想の肯定的解決に向けて、Sinha のスペクトル系列に関する同様の問題 (E_2 ページにおける退化の証明) に取り組んだが、肯定的にも否定的にも証明することはできなかった。そこで、関連する文献を調査した結果、Salvatore の論文に余次元 1 の Sinha のスペクトル系列が標数 2 では E_2 ページで退化しないことの証明が実質的に含まれていることが分かった。筆者はこの標数 2 での非退化を Thom 空間モデルを用いて証明できないか考察し、実際証明することができた。さらに、標数 3 での非退化も証明することができた。これらを次の論文にまとめた。

Syunji Moriya,

Differentials of Sinha's spectral sequence for long knots in codimension one,
arXiv:2303.08111

(現在査読中。) 現在は余次元 1 の場合のみであり、この場合の Sinha のスペクトル系列の幾何学的な意味は不明であるが、より高余次元の場合に同様の計算ができれば、正標数のコホモロジーに関して精密な情報が得られ、正標数の有限型不変量に関する情報も得られるのではないかと考えている。オペラッドの組み合わせ的モデルを用いている Salvatore の手法に比べて、Thom 空間モデルを用いる手法はグラフによる分類や幾何学的な直感を用いることができるため、高余次元への拡張に適していると考えている。また、上記の微分の計算に関する論文が arXiv に公開された後、Salvatore の学生の Andrea Marino が Ph.D thesis において Sinha のスペクトル系列の微分の新たな計算法を提唱しており、上記の論文が引用されている。このように、他の研究者が正標数における Sinha の系列に注目する一つのきっかけになったのではないかと考えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Syunji Moriya	4. 巻 24
2. 論文標題 Models for knot spaces and Atiyah duality	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 183-250
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 森谷 駿二
2. 発表標題 結び目のなす空間に関するスペクトル系列について
3. 学会等名 空間の代数的・幾何学的モデルとその周辺（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森谷 駿二
2. 発表標題 A spectral sequence for cohomology of knot spaces
3. 学会等名 第67回トポロジーシンポジウム（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 森谷 駿二
2. 発表標題 On models for knot spaces
3. 学会等名 2020年度ホモトピー論シンポジウム（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 森谷 駿二
2. 発表標題 A spectral sequence for cohomology of knot spaces
3. 学会等名 operad pop-up conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 森谷駿二
2. 発表標題 On cohomology of space of knots in manifold
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 森谷駿二
2. 発表標題 Knot space, configuration space, and Frobenius pair
3. 学会等名 福岡ホモトピー論セミナー - (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 森谷 駿二
2. 発表標題 Spectral sequences for the cohomology of spaces of long knots in manifolds
3. 学会等名 高知ホモトピー論談話会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------