

令和 5 年 6 月 9 日現在

機関番号：32612

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K14194

研究課題名(和文) 組み合わせ的手法による低次元シンプレクティック多様体の研究

研究課題名(英文) Study of low-dimensional symplectic manifolds in combinatorial ways

研究代表者

早野 健太 (HAYANO, Kenta)

慶應義塾大学・理工学部(矢上)・准教授

研究者番号：20722606

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：曲面の写像類群におけるチェイン関係式に対応する手術が、小平次元を小さくし得ることを示した。またこの証明に現れるレフシェッツ束の性質を調べることにより、ファイバー和分解可能性と切断の存在に関するStipsicz予想の新たな反例を与えた。
正則な種数1のレフシェッツペンを分類し、さらに分類に現れるペンの消滅サイクルを決定した。
Baykur-佐伯による先行研究において、(特異)レフシェッツ束からtrisection写像を得るアルゴリズムが与えられていたが、このアルゴリズムに得られるtrisection写像に対応する図式を、元のレフシェッツ束の消滅サイクルから決定する方法を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Stipsicz予想の反例はこれまで種数が3以下のものしか知られていなかったが、本研究において任意種数の反例が存在することが示された。またその過程でレフシェッツペンのスピン構造許容可能性を、消滅サイクルから決定する方法を与えたが、この結果自体4次元多様体の基本的な位相不変量に関わるもので、その学術的意義は高い。
種数1の正則なペンの消滅サイクルを決定する際に用いた手法は、より高次元のシンプレクティック多様体の組み合わせ的表示の理解の助けにもなることが期待される。実際、本研究では6次元シンプレクティック多様体の組み合わせ的表示に関する新たな結果も得られている。

研究成果の概要(英文)：We show that a surgery corresponding to the chain relations in the mapping class groups of surfaces can decrease the Kodaira dimensions of total spaces of Lefschetz fibrations. Moreover, by analyzing examples of Lefschetz fibrations appearing in the proof of this result, we construct new counterexamples of the Stipsicz conjecture on fiber-sum decomposability and existence of sections of Lefschetz fibrations.
We completely classify genus-1 holomorphic Lefschetz pencils and obtain vanishing cycles of the Lefschetz pencils in the classification list.
Baykur and Saeki gave an algorithm to obtain trisection mappings from (broken) Lefschetz fibrations. We give an algorithm to determine trisection diagrams corresponding to trisection mappings obtained by Baykur-Saeki's algorithm from vanishing cycles of original (broken) Lefschetz fibrations.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：レフシェッツ束 シンプレクティック多様体 写像類群 モノドロミー

1. 研究開始当初の背景

4次元シンプレクティック閉多様体は、レフシェッツペンシルと呼ばれる可微分写像を介し、曲面の写像類群のある関係式と対応するということが知られており、その結果それらを組み合わせ的に扱うことができる。この手法が現れて以来、4次元シンプレクティック多様体のトポロジーの研究は飛躍的な発展を遂げた。しかし一方で、4次元シンプレクティックカラビ・ヤウ多様体(つまり両立する概複素構造の第一チャーン類が自明となるシンプレクティック構造を持つ多様体)の分類や、BMY不等式を満たさない4次元シンプレクティック多様体の存在問題などの、4次元シンプレクティック多様体の全体像に関わる重要な問題の多くは依然未解決のままである。また6次元シンプレクティックカラビ・ヤウ閉多様体はミラー対称性の研究でも自然に現れる重要な対象であるが、その地誌学(つまりそれらの位相不変量を取り得る値の範囲)については十分理解できているとは言いがたい。本研究では4次元および6次元シンプレクティック多様体の新たな例を与え、その全体像をより深く理解することを目標とした。

知られている4次元シンプレクティック多様体に対する手術の多くは、小平次元を小さくすることはできないということがわかっている。シンプレクティックカラビ・ヤウ多様体の小平次元は0であるので、これらの手術によりシンプレクティックカラビ・ヤウ多様体の新たな例を得るためには、非正の小平次元を持つ例が必要である。そのような例はあまり多くは知られていないが、[参考文献2]では小平次元0の例を多数構成していた。本研究ではこれらの例を新たな例の構成に役立てていくことを考えていた。

6次元シンプレクティック閉多様体は4次元の場合と同様、写像類群のある関係式と組み紐群のある関係式の対により、組み合わせ的に扱うことができる([参考文献1])。この[参考文献1]での組み合わせ的表示は、全ての6次元シンプレクティック閉多様体に対し存在するということがわかっており、4次元の場合のように、この組み合わせ的表示が具体例を得るための手法として有用であるということが見込まれる。しかしながらこの手法により6次元シンプレクティック多様体を構成するためには、まずその部分多様体として現れる、4次元シンプレクティック多様体に対応する写像類群の関係式を与える必要があり、その複雑さからか、未だこの[参考文献1]での組み合わせ的表示の非自明な例は一つも知られていない。先行研究において発達した、レフシェッツペンシルを構成するための種々の技法を、4次元だけでなく6次元のシンプレクティック多様体の新たな例を得るための足掛かりとすることを想定していた。

2. 研究の目的

研究開始当初、期間内に以下を行うことを目的と設定した。

- (1) 4次元シンプレクティック多様体に対する、小平次元を小さくし得る手術の例を与え、具体的に小平次元が小さくなるための条件を決定する。
- (2) 各正の整数 d に対し、複素射影平面上の種数 $(d-1)(d-2)/2$ のレフシェッツペンシルが存在する。本研究ではこのレフシェッツペンシルのモノドロミーを求める。
- (3) K3曲面やトーラス上のトーラス束は4次元シンプレクティックカラビ・ヤウ多様体であり、これらで4次元シンプレクティックカラビ・ヤウ多様体が尽くされると予想されている。本研究ではこれらとは微分同相ではない4次元シンプレクティックカラビ・ヤウ多様体を構成する。
- (4) 複素射影空間のブローアップなどの、比較的単純な6次元シンプレクティック多様体に対し、その[参考文献1]で導入された組み合わせ的表示の例を与える。
- (5) レフシェッツペンシルをブローアップするとレフシェッツ束が得られ、対応する4次元シンプレクティック多様体の組み合わせ的表示は扱いやすいものとなる。この操作を6次元の場合に一般化し、[参考文献1]で導入されたものよりも扱いやすい6次元シンプレクティック多様体の表示方法を与える。

3. 研究の方法

「2. 研究の目的」で説明した各目的ごとに、研究開始当初に想定していた目的達成のための方法を説明する。((3) と (5) については成果を得られなかったのでここでは触れない。)

- (1) 写像類群の表示で、関係式がランタン関係式とチェイン関係式のみからなるものが存在し、この2つは基本的な関係式といえる。レフシェッツペンシルを介し、写像類群の関係式から4次元多様体の手術が

定まるが、ランタン関係式に対応する手術は小平次元を小さくはできないので、ここではチェイン関係式に対応する手術を調べる。手術を施す多様体として、まず種数 g の曲面の $(2g+1)$ -チェイン関係式に対応するレフシェッツペンシルを考える。そして手術後の多様体の小平次元を [参考文献 2] での手法で計算し、実際に小平次元が小さくなることを示す。それができれば他の多様体にも同様の手術を施し、小平次元が下がる例と比較することで、小平次元が小さくなるための条件を特定する。

- (2) 同次多項式から得られる $\mathbb{C}P^2$ 上のレフシェッツペンシルを考える。このときモノドロミーの計算が楽になるよう、同次多項式として対称性の高いものをとる。計算が困難な場合は Mathematica での計算実験により結果を予測し、それでも困難なら組み合わせ的議論によるレフシェッツペンシルの構成も試みる。この場合できたレフシェッツペンシルが $\mathbb{C}P^2$ 上のものであるということを示す必要があるが、それには小平次元の計算やカービィ図式などを援用する。
- (4) まず [参考文献 1] の表示について説明する。この表示は写像類群の関係式と組み紐群の関係式からなり、いずれもシンプレクティック 6 次元多様体から $\mathbb{C}P^2$ への写像から得られる。実際、写像類群の関係式は、 $\mathbb{C}P^2$ への写像の、 $\mathbb{C}P^2$ 内の射影直線の逆像への制限として現れる、レフシェッツペンシルに対応する関係式であり、組み紐群の関係式は、 $\mathbb{C}P^2$ への写像の臨界値集合の、射影 $\mathbb{C}P^2 \dashrightarrow \mathbb{C}P^1$ に関するブレイドモノドロミーから得られる。さて具体例を得る方法を説明する。 $\mathbb{C}P^3$ から $\mathbb{C}P^2$ への写像を、同次多項式を与えることにより定義し、そのモノドロミーを直接計算する。手計算が困難な場合は Mathematica で実験し、結果を予測してそれを示すか、次項 (5) の結果で単純化されたものを求める。 $\mathbb{C}P^3$ の表示が得られたら、代数多様体の分岐被覆として得られる別の 6 次元多様体も考える。

4. 研究成果

まず「2. 研究の目的」で説明した各目的を達成するために行った研究で得られた成果を述べ ((3) と (5) については成果を得られなかったのでここでは触れない)、次に研究開始当初は予期していなかった成果 (6) を説明する。

- (1) 「3. 研究の方法 (1)」で述べた通り、チェイン関係式に対応する手術を、具体的なレフシェッツペンシルに施し、手術の前後の多様体の小平次元を計算することにより、この手術が小平次元を小さくすることができるということを示した。さらにこれらの例のモノドロミー分解をランタン関係式によりさらに変形して、種数 3 のレフシェッツ束で、その全空間がいくつかの複素射影平面とその向きを逆にしたものの連結和と同相ではあるが微分同相ではないような例、および種数 3 のレフシェッツペンシルの対で互いに同型ではないものを与えた。またここで得たレフシェッツペンシルの性質を調べることにより、「レフシェッツ束がファイバー分解できないなら自己交差 -1 の切断を持つであろう」という、Stipsicz により提案された予想の新たな反例を得ることができた。またこの新たな反例を与えるための補題として、レフシェッツ束の全空間がスピンになるための条件を与えている Stipsicz の結果を、レフシェッツペンシルに一般化した。以上の結果は「5. 主な発表論文」に記載されている、門田直之氏と R. İ. Baykur 氏との共著論文にまとめられている。

Stipsicz による予想の反例は既に知られていたが、本研究以前に知られていた例は種数が 3 以下のものに限られていた。本研究で任意の種数の反例が存在することを示すことができたが、その際 (これまでの研究では注目されなかった) 全空間のスピン構造に注目することが功を奏した。レフシェッツペンシルの消滅サイクルからスピン構造許容可能性を判定する方法自体、新しい結果であることを強調しておく。

- (2) まず初めに、種数 1 の正則なペンシルを分類することができた。より具体的には、 $\mathbb{C}P^2$ 上の 3 次の直線束のペンシル、および 2 つの射影直線の直積上の双次数 $(2, 2)$ の直線束のペンシルはいずれも種数 1 となるが、複素曲面上の種数 1 のペンシルはこれらのブローアップに限ることを示した。次に分類結果に現れるペンシルの消滅サイクルを決定した。可微分なレフシェッツペンシルは写像類群を介して組み合わせ的にも構成することができ、先行研究において種数 1 の可微分なペンシルはいくつか与えられていた。先行研究ではこれらのペンシルが正則であるか、判定できていなかったが、既に知られていた種数 1 のペンシルが、本研究の分類に現れる正則なペンシルと同型であることも、得られた消滅サイクルを解析することにより示すことに成功した。以上の結果は「5. 主な発表論文」に記載されている、濱田法行氏との共著論文にまとめられている。

「2. 研究の目的 (2)」にも記載した通り、 $\mathbb{C}P^2$ は各正の整数 d に対し種数 $(d-1)(d-2)/2$ のペンシルを許容する。今回種数 1 (つまり $d=3$ の場合) のペンシルの消滅サイクルを決定できたが、より高種数のものについては (同様の方法で決定できるであろうと予想しているものの) 本研究期間内では決定できなかった。

- (4) Moishezon-Teicher の理論を一般化して得られるモノドロミーを予想することにより、[参考文献 1] の表示の具体例を得ることができた。

Moishezon-Teicher の理論では、射影的代数曲面を線形に埋め込まれた複素射影平面の族にまで退化させ、最終的に現れた平面配置のモノドロミーと、それぞれの退化でのモノドロミーの変化の規則を調べることにより、元の代数曲面上のペンシルのモノドロミーを決定する、というものである。本研究ではまずこの手法を 3次元射影空間に適用することを試みた。そのためには、Veronese 埋め込みにより埋め込まれた複素射影空間に対し、

- A. その線形な複素射影空間の族への退化を与え、
- B. 退化により最終的に現れる、線形な複素射影空間の族のモノドロミーを決定し、
- C. 退化の各過程で起こるモノドロミーの変化の規則を調べる

必要があるが、これらの課題のうち A, B は本研究で完遂することができた。残念ながら C については規則を予想することはできたものの、証明することはできなかった。この予想が正しいと仮定すると現れるモノドロミーの組み合わせの性質を調べることにより、予想が正しいことを示唆する事実をいくつか証明できている。また予想が正しいと仮定したうえで、複素射影空間内のラグランジュ球面の配置の諸性質を示すことができている。先行研究では [参考文献 1] による表示の具体例が一切知られていなかったため、予想の正否に関わらず得られたモノドロミーは、[参考文献 1] による表示の非自明な具体例として意義のあるものである。

- (6) シンプレクティック多様体上の単純な trisection の図式に関する結果を得ることができた。Trisection 分割は [参考文献 4] で導入されたもので、4次元多様体の 3つのハンドル体による分割を指すが、この分割は 4次元多様体から平面への安定写像で、特別な臨界値集合を持つものから得ることができる (ここではこの安定写像を trisection 写像と呼ぶ)。[参考文献 3] において、この安定写像のさらに特別なものとして単純な trisection を定義し、有向特異レフシェッツ束をホモトピーにより単純な trisection に変形するアルゴリズムを与えた。一方 trisection 分割は Heegaard 分解と同様に閉曲面上の単純閉曲線の組で表すことができるが (この単純閉曲線の組を trisection 分割の図式と呼ぶ)、単純な trisection から得られる分割の図式を得るには、その消滅サイクルを知る必要がある。本研究ではここで必要となる消滅サイクルを、もとの有向特異レフシェッツ束の消滅サイクルから得るためのアルゴリズムを与えた。レフシェッツ束も有向特異レフシェッツ束のうち特別なものであるため、この結果を用いれば、多くのシンプレクティック多様体上の単純な trisection の図式を得ることができる。以上の結果は「5. 主な発表論文」に記載されている単著論文にまとめられている。

<引用文献>

- [1] D. Auroux, Symplectic maps to projective spaces and symplectic invariants, Turkish J. Math. 25 (2001), no. 1, 1–42.
- [2] R. İ. Baykur and K. Hayano, Multisections of Lefschetz fibrations and topology of symplectic 4-manifolds, Geom. Topol. 20 (2016), no. 4, 2335–2395.
- [3] R. İ. Baykur and O. Saeki, Simplifying indefinite fibrations on 4-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 376 (2023), no. 5, 3011–3062.
- [4] D. Gay and R. Kirby, Trisecting 4-manifolds, Geom. Topol. 20 (2016), no. 6, 3097–3132.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 R. Inanc Baykur, Kenta Hayano and Naoyuki Monden	4. 巻 303
2. 論文標題 Unchaining surgery and topology of symplectic 4-manifolds	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 32 pp.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-023-03204-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 HAMADA Noriyuki, HAYANO Kenta	4. 巻 45
2. 論文標題 Classification of genus-1holomorphic Lefschetz pencils	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 TURKISH JOURNAL OF MATHEMATICS	6. 最初と最後の頁 1079 ~ 1119
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3906/mat-2008-88	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naoki Hamada, Kenta Hayano, Shunsuke Ichiki, Yutaro Kabata and Hiroshi Teramoto	4. 巻 30
2. 論文標題 Topology of Pareto sets of strongly convex problems	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Optimization	6. 最初と最後の頁 2659-2686
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/19M1271439	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kenta Hayano	4. 巻 -
2. 論文標題 On diagrams of simplified trisections and mapping class groups	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 早野健太
2. 発表標題 An explicit example of a monodromy factorization pair for a symplectic 6-manifold
3. 学会等名 4次元トポロジー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kenta Hayano
2. 発表標題 Stability of non-proper functions
3. 学会等名 16th International Workshop on Real and Complex Singularities (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kenta Hayano
2. 発表標題 Staility of non-proper functions
3. 学会等名 6th International Workshop on Singularities in Generic Geometry and its Applications (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 早野健太
2. 発表標題 Classification of genus-1 holomorphic Lefschetz pencils
3. 学会等名 4次元トポロジー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 早野健太
2. 発表標題 4次元多様体のtrisection 1,2
3. 学会等名 接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kenta Hayano
2. 発表標題 Stability of non-proper functions
3. 学会等名 Research on topology and differential geometry using singularity theory of differentiable maps
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kenta Hayano
2. 発表標題 New counterexamples to Stipsicz's conjecture on fiber-sum indecomposable Lefschetz fibrations
3. 学会等名 Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenta Hayano
2. 発表標題 Stability of non-proper functions
3. 学会等名 MSJ Spring meeting 2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenta Hayano
2. 発表標題 Stability of non-proper functions
3. 学会等名 Spring Central and Western Joint Sectional Meeting, Special Session on Real and Complex Singularities (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 早野 健太
2. 発表標題 New counterexamples to Stipsicz's conjecture on fiber-sum indecomposable Lefschetz fibrations
3. 学会等名 Four Dimensional Topology
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 早野 健太
2. 発表標題 On diagrams of simplified trisections and mapping class groups
3. 学会等名 Local and global study of singularity theory of differentiable maps
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Workshop Sapporo 2019 http://www.math.keio.ac.jp/~k-hayano/sapporo2019.html
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Workshop on Lefschetz Pencils and Low dimensional Topology	開催年 2019年～2019年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------