様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　７ 月　７ 日現在

機関番号：３４３１５
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2017～2019
課題番号：１７Ｋ１４１９５

研究課題名（和文）3次元多様体上の葉層構造の剛性の研究

研究課題名（英文）On rigidity of foliations on 3-manifolds

研究代表者
野澤　啓（Nozawa, Hiraku）

立命館大学・理工学部・准教授

研究者番号：８０７０６５５７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：空間X上の葉層構造とは，直観的にはより小さい次元の空間へのXの分割のことであり，微分方程式や低次元トポロジーとの関わりにおいて研究されてきた．分割されて得られた小さい次元の空間は葉と呼ばれる．葉層構造の葉は自分自身や他の葉に巻き付き，葉や全体の空間は興味深い幾何的性質を有する．2次元の葉を持つ3次元の空間上のトートな葉層構造について，不思議議な有限性が知られているが，具体的な状況での理解はいまだ乏しい．本研究ではその有限性が顕著に現れる場合について研究した．メニエの例と呼ばれる葉層構造の構成を一般化して剛性と呼ばれる良い性質を持つ新たな例を構成し，ある場合において葉層構造の分類を与えた．

研究成果の学術的意義や社会的意義
トートな葉層構造とは，直観的にはその葉がシャボン玉の膜のように張り詰めているような葉層構造と考えることができる．このような葉層構造は曲面の上の流れの分類の後に自然に研究され，ガバイやクロンハイマー=ムロフカの研究によって非常に強い有限性を持っていることが知られている．その有限性の理解することは3次元空間の幾何，とくにその空間の許容しうる力学系（流れ）の理解を深めることに繋がり，低次元トポロジーにおいて意義があると考えられる．本研究では，顕著な例においてこの有限性の研究を行い，新たな葉層構造の例を構成し，幾何的な葉層構造の分類をある条件下で与えることで，有限性の理解を進めることができた．

研究成果の概要（英文）：A foliation on a space X is a partition of X into spaces of smaller dimension, which are called leaves. The leaves of foliations wrap around other leaves, and admit interesting geometry. It is known that the classification of taut foliations with 2-dimensional leaves on 3-dimensional spaces has some mysterious finite aspects. However few is known about this finiteness phenomenon in concrete situation. In this research project, we study this finiteness phenomenon in simple and important cases. We constructed new examples of such foliations, and gave classification results of foliations in some cases to make progress toward understanding the finiteness.

研究分野：微分位相幾何

キーワード：葉層構造　3次元多様体　群作用　微分位相幾何　グラフ理論　リーマン幾何　対称空間　剛性理論

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

空間 X 上の葉層構造とは，直観的には，より小さい次元の空間への X の分割のことである．分割されて得られた小さい次元の空間は葉と呼ばれる．例えば，停留点を持たない流れは流線を葉とする 1 次元の葉層構造とみなせる．葉層構造の葉は自分自身や他の葉に巻き付くことから興味深い幾何学を有し，微分方程式や低次元トポロジーなどとの関連において主に 60 年代から研究が行われてきた．微分方程式の周期解に相当するコンパクト葉（閉じた葉）が存在すると、その事実から様々なことが分かる．ダンジョワ，ジーゲルが二次元トーラス上の 1 次元葉層構造について，コンパクト葉を持つか，そうでなければ，全ての軌道がトーラス内で稠密となることを示したことを契機とし，コンパクトな葉の存在問題が脚光を浴びた．その後，3 次元多様体上の 2 次元の葉層構造に関して以下のような研究が行われ，コンパクト葉を持たない葉層構造やより広く緊性（トートネス）と呼ばれる性質を持つ葉層構造は，一般の葉層構造については成り立たないような様々な有限性を持つことが分かった．

-（リコリッシュ）　全ての 3 次元多様体は 2 次元葉層構造を許容する．
-（ノビコフ）　3 次元球面上の全ての 2 次元葉層構造はコンパクト葉を持つ．
-（クロンハイマー=ムロフカ）3 次元閉多様体上では緊な葉層構造の平面場のホモトピー類はたかだか有限個である．
-（ガバイ）　アトロイダルな 3 次元閉多様体上では緊な葉層構造の粗アイソトピーによって有限個に分類される．

これらの問いの背景には多様体や葉層構造の力学系的な剛性が関わることが推察される．しかし，この有限性に関する理解はいまだ乏しく，多様体を与えた場合の葉層構造の分類などは未知の部分が大きい．次のような問いが挙げられる．

問題 A.　コンパクト葉を持たないような余次元 1 の葉層構造を許容する 3 次元多様体を特徴づけよ．
問題 B. 与えられた 3 次元多様体上のコンパクト葉を持たない葉層構造を分類せよ．
問題 C. 同様の有限性・剛性を持つ高次元多様体上の葉層構造の例を構成せよ．

これらの問いにおいて最も考えやすいのは，円周束上の曲面束の場合と考えられる．モノドロミー写像が双曲的、擬アノソフという条件がアトロイダル性と対応している．これらの場合，ジス=セルジエスクの仕事，中山の仕事が挙げられる．

-（ジス=セルジエスク）双曲的モノドロミーを持つ円周上の 2 次元トーラス束 M はトーラス上の Anosov 葉層から得られる標準的な 2 次元葉層構造を２つ持つ．ジス=セルジエスクは M 上のコンパクト葉を持たない向き付け可能な 2 次元葉層は F に限ることを示した．
-（中山）擬アノソフな微分同相をモノドロミーとする円周上の曲面束において，メニエの例と呼ばれる葉層構造が知られている．中山は学位論文において，モノドロミーに関するいくつかの条件の下でオイラー類が極大となるような横断的アファイン構造を持つ葉層構造はメニエの例に同相となることを示した．

２．研究の目的

本研究の目的は，適切な条件下で次の問題を解き，3 次元双曲多様体や局所等質空間上の葉層構造に対する葉層構造の剛性に関する理解を深めることにある．

問 I. 擬アノソフ微分同相をモノドロミーとする円周上の曲面束 M について，コンパクト葉を持たない葉層構造の新しい例を構成し，M がコンパクト葉を持たない葉層構造を許容するための条件を求めよ．また，与えられたコンパクト葉を持たないような葉層構造が松元-中山の構成した葉層構造に同相になるための条件を求めよ．

問 II. 線型なアノソフ微分同相をモノドロミーとする高次元のトーラス束について，与えられたコンパクト葉を持たないような葉層構造がアノソフ葉層に同相となることを示せ.また，局所等質空間上の局所剛性を持つ葉層構造の例を見つけよ．

３．研究の方法

問 I に関する研究の主な部分においては、葉層構造に対するモース理論を用いた．モース理論は微分位相幾何・トポロジーの基礎的理論で，関数によって与えられた空間を切ることで空間の構造を調べる．ここでは，葉層構造の葉に対して一斉にモース理論的な考察をおこなった．与えられたトートな葉層構造を摂動して曲面束のファイバーたちに対して一般の位置においたとき，円周束の射影を各葉に制限したものは，ほぼモース関数に近く，臨界点は葉層構造と曲面束のファイバーたちの接点と一致する．与えられた葉層構造のオイラー類が極大となるとき，局所的なアイソトピーを何回も行うことで，接点を正の接点あるいは負の接点のいずれのみにできるこ

とを示した．これが以下(1)②における最重要なステップである．
問 II に関する研究においては，クレイナー=レーブによる非コンパクト型対称空間に関する剛性理論を用いた．彼らの理論により，実階が 2 以上の非コンパクト型対称空間では，擬計量同型を計量同型で近似できる．多様体 M 上にリー葉層構造が与えられると，M の基本群が葉に対して有限距離の誤差を除いて擬計量同型で作用する．この誤差を含む群作用を計量同型で近似することにより，実際に基本群の葉への計量を保つ作用を構成することができる．これが(2)①において鍵となるアイディアである．
その他には，葉層構造のトートネスを代数的にとらえることのできるヘフリガーコホモロジーについて考察したほか，および葉の幾何を組み合わせ的にとらえるためにグラフ理論についても考察した．

４．研究成果

(1)

① ジルベール・エクター氏(リヨン第一大学名誉教授)と共同で，円周上の曲面束の上のトートな葉層構造の新たな例を構成した．円周上の曲面束については，メニエの例[1]と呼ばれるトートな葉層構造の例が最も基本的である．本研究において，メニエの例の前提条件を一般化した形でのトートな葉層構造の構成が可能であることを示した．曲面 F の微分同相 f をモノドロミーとするような円周上の曲面束について，メニエの例においては，f によって定数倍となるような F 上の閉 1 形式 k が存在するとき，k を用いて M 上のトートな葉層構造が構成された．しかし，実際にはこのような閉 1 形式 k はほとんど存在しないという難点があった．本研究の代表者はジルベール・ヘクター氏と共に，f によって定数倍されるような F 上の 1 次のコホモロジー類が存在するとき，葉層構造を構成した．閉形式からコホモロジー類に条件を緩めたことで，例が豊富に構成できるようになった．メニエの例は横断的なアファイン構造を持つ上に，片側分岐したトートな葉層構造の例であったが，この例も同様の性質を持つ．構成の鍵はモーザーの補題という非退化な閉 1 次形式の安定性である．この研究により，上述の研究目的の問 I の例の構成に関する部分について一つの進展を与えることができた．

② ジルベール・エクター氏との共同研究により，前段落で述べた円周上の曲面束 M の上のトートな葉層構造の新たな例 F について，中山[2]によってメニエの例に対して示された剛性が一般化した形で成り立つことを証明した．つまり，M の 1 次ベッチ数が 1 であるとき，M 上の横断的にアファインな葉層構造であって，オイラー類が極大であるようなものは，①で構成した例にアイソトピックになることを示した．中山の結果ではモノドロミーのコホモロジーへの作用に条件が必要であったが，この結果においてはその制限を取り外すことができた．この結果はより一般的な次の結果を用いて示される．M 上の向き付け可能な横断的にアファインな葉層構造の組で、ともにオイラー類が極大であるようなホロノミー準同型が互いに等しいものは互いにアイソトピックである．これらの結果により，研究目的の問 I の分類に関わる部分について，一つの解答を与えることができた．これらの結果を論文“Taut foliations on surface bundles”として執筆中である．

(2)

① ガエル・メニエ氏（南部ブルターニュ大学）と共同で，葉が局所対称となるようなリー葉層・リーマン葉層について研究をおこなった．実双曲空間および複素双曲空間を直和成分に持たないような非コンパクト型対称空間を X としたとき，極小なリー葉層であって，一つの葉が X に局所計量同型となるものは，等質的葉層構造と呼ばれる局所等質空間上の標準的な例を滑らかな写像で引き戻すことで得られることを示した．この結果は論文“Rigidity of Lie foliations with locally symmetric leaves”として執筆中である．この結果により問 II の後半部分について，一つの解答を与えることができた．

② ヘスュス・アルバレス・ロペス氏とラモン・バラル・リホ氏と共同で，葉がポアンカレ円盤を直和成分に持たないような非コンパクト型対称空間に局所計量同型となるような極小な同程度連続葉層付き空間について研究した．同程度連続な葉層付き空間は一般には多様体ではないが、リーマン葉層構造の様々な性質を共有している．葉がポアンカレ円盤を直和成分に持たないような非コンパクト型対称空間に局所計量同型となるような極小な同程度連続葉層付き空間が，等質的葉層構造の有限被覆の列の逆極限によって得られることを示した．

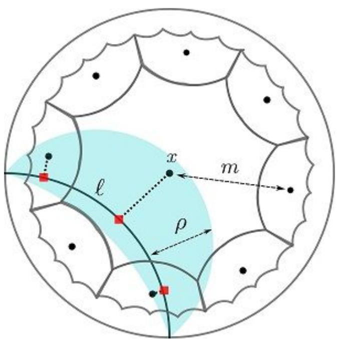
(3) リーマン葉層構造のヘフリガーコホモロジーについて研究を行った．葉層構造の緊性（トートネス）はヘフリガーによって導入されたヘフリガーのコホモロジーによって特徴づけられる．一方で，閉多様体上のリーマン葉層構造の研究について，テンスネスと呼ばれる緊性を一般化した性質が非常に有効であることが知られている．研究代表者はホセ・イグナシオ・ロジョ・プリエト氏(バスク州立大学)とともに導入した強テンスネスという概念について，閉多様体上の葉層構造に対して，ヘフリガーコホモロジーによって特徴づけられることを示した。さらに，完備なリーマン葉層構造のヘフリガーコホモロジーが不変コホモロジーと呼ばれる位相的な性質を持つコホモロジーの双対になっていることを示し，完備なリーマン葉層構造が強テンスネスを持つことを示した．これはドミンゲスの定理の一般化となっている．これらの結果を論文”Haefliger cohomology of complete Riemannian foliations”にまと

め，学術雑誌に投稿した．

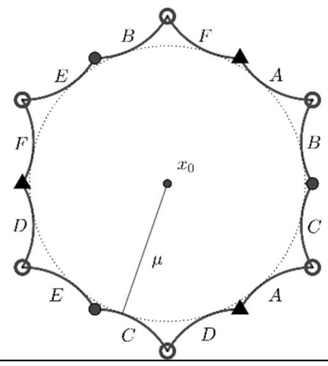
(4) 佐々木多様体はレーブ流の軌道からマルテリ，スパークス，ヤウらにより佐々木多様体の体積の微分がケーラー多様体に対する二木不変量レーブ流のケーラー錘における正則レフシェツ数はその体積と関係することおよび体積は佐々木 Einstein 計量の場合に極小となるという剛性が成り立つことが示された．ただ，彼らの議論は収束性を無視した形式的な部分があることから，収束性について考察し，レーブ流の閉包として得られるトーラスの複素化の作用を用いて収束性を正当化するアイディアを得た．トーリック佐々木多様体のケーラー錘について，複素トーラスの十分に絶対値の小さい元に対して正則レフシェツ数が定義されることを示し，マルテリ，スパークス，ヤウらによる佐々木多様体の体積の公式を佐々木多様体がトーリックな場合に厳密に示した．これらの結果を論文”On volume of toric Sasakian manifolds”にまとめ、学術雑誌に投稿した．

(5) ヘスュス・アントニオ・アルバレス・ロペス氏(サンティアゴ・デ・コンポステラ大学)，ラモン・バラル・リホ氏(サンティアゴ・デ・コンポステラ大学/立命館大学)，ジョン・ハントン氏（ダラム大学)，ジョン・パーカー氏（ダラム大学）と共同で，ユークリッド空間内のデローネ集合から得られる葉層付き空間の研究を行った．デローネ集合とは一様に散らばった点集合のことであり，準結晶の数学的モデルとしても用いられる．ユークリッド空間内のデローネ集合全体はσコンパクト空間Ｄをなす．Ｄにはユークリッド空間が平行移動により作用する．与えられたデローネ集合に対して，そのユークリッド空間の作用の軌道の閉包を考えることで，デローネ集合から葉層付き空間を得ることができる．カオス的なデローネ集合を，この葉層付き空間がカオス的であるようなデローネ集合と定義し，カオス的なデローネ集合について研究を行った．ここで，カオス的な葉層付き空間の定義は良く知られた Devaney の 3 条件（推移的軌道の存在，閉軌道の稠密性，初期値鋭敏性）に基づいている．しかし，この場合，推移的軌道の存在は構成から常に成り立ち，初期値鋭敏性はらの結果により推移的軌道の存在，閉軌道の稠密性から導かれるので，閉軌道の稠密性のみが要件である．

カオス的なデローネ集合はデローネ集合全体の中で生成的であることを示した．また，ユークリッド空間の場合のデローネ集合の構成法としてよく知られた切断射影法の双曲幾何的な一般化について考察し，デローネ集合が得られるためのフクス群に関する幾何学的特徴づけを得た．さらに，それらの条件を満たすデローネ集合の具体例を構成した．これらの結果を論文”Chaotic Delone Sets”にまとめ，学術雑誌に投稿した．



測地線ℓに点 x の軌道を射影することでℓ上の点集合を得る



この多角形を基本領域とするフクス群からデローネ集合が得られる

(6) ラモン・バラル・リホ氏(立命館大学)と共同でカントール集合によって彩色されたグラフに付随する力学系におけるカオス的現象について研究した．彩色グラフに対して，前項で述べたデローネ集合と類似した方法で，特異点を持つ葉層付き空間を対応させることができることが知られている．彩色グラフのカオス性をこの葉層付き空間のカオス性により定義し，カオス的になるという条件が彩色グラフの空間においてジェネリック（生成的）であることを示した．この結果を論文”Genericity of chaos for colored graphs”にまとめ，学術雑誌に投稿した．

(7) ラモン・バラル・リホ氏，ヘスュス・アントニオ・アルバレス・ロペス氏と共同で無限運動予想と呼ばれる彩色グラフに関する予想について研究を行った．グラフ Ｇ が与えられたとき，Ｇの彩色が区別的であるとは，彩色を保つようなグラフＧの自己同型が恒等写像に限られるときにいう．無限運動予想とは，恒等写像以外の任意の自己同型が無限個の点を移動させるときには，2 色からなる区別的な彩色が存在する，という予想であり，近年活発に研究されている．本研究では，対称的な増大度を持つグラフについて，2 色で頂点を塗り分けることで，彩色グラフが恒等写像との距離が有限になるような自己同型しか持たないようにできることを示した．その応用としてディーステル・リーダーグラフおよびサイクルの長さが

有界であるようなグラフについて無限運動予想を示した．これらの結果を論文 " Coarse distinguishability of graphs with symmetric growth " にまとめ，学術雑誌に投稿した．

(8) 高橋典寿氏（立命館大学）と向き付け可能な閉曲面上の周期的微分同相について共同研究を行った．超楕円的な周期的微分同相の初等的な分類基本領域による曲面の具体的な分割表示を与えた．この基本領域による分割表示を用いることで，分類およびデーンツイスト表示に関する石坂瑞穂氏の定理の精密化を行った．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 高橋 典寿	４．巻 －
２．論文標題 Dehn twist presentations of hyperelliptic periodic diffeomorphisms on closed surfaces	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Kodai Mathmatical Journal	６．最初と最後の頁 －
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計17件（うち招待講演　5件／うち国際学会　8件）

１．発表者名 Oliver Goertsches, 野澤 啓, Dirk Toeben
２．発表標題 Localization of Chern-Simons type invariants of Sasakian manifolds
３．学会等名 The 3-rd International Workshop "Geometric Structures and Interdisciplinary Applications"（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Oliver Goertsches, 野澤 啓, Dirk Toeben
２．発表標題 Localizacion del volumen de variedades sasakianas
３．学会等名 Vidal Abascal Seminar
４．発表年 2018年

１．発表者名 Gilbert Hector, 野澤 啓
２．発表標題 Introduction to taut foliations on 3-manifolds I,II
３．学会等名 Advanced Course on Geometry, Topology and Global Analysis of Foliated Spaces（招待講演）
４．発表年 2018年

1．発表者名
Gilbert Hector，野澤 啓

2．発表標題
Taut foliations on surface bundles over the circle

3．学会等名
New trends on Foliated and Stratified Spaces: Topology, Geometry and Analysis. Commemorating the 70th birthday of Xose M. Masa（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2018年

1．発表者名
Oliver Goertsches，野澤 啓，Dirk Toeben

2．発表標題
On the volume of Sasakian manifolds

3．学会等名
The XII-th International Conference Differential Geometry and Dynamical Systems（国際学会）

4．発表年
2018年

1．発表者名
Gilbert Hector，野澤 啓

2．発表標題
Taut foliations on surface bundles over S^1

3．学会等名
XXI Brazillian Topology Meeting（国際学会）

4．発表年
2018年

1．発表者名
Gilbert Hector，野澤 啓

2．発表標題
Taut foliations on surface bundles over the circle

3．学会等名
Research Seminar of Research group "Differential Geometry and Analysis"

4．発表年
2018年

1．発表者名 野澤 啓
2．発表標題 La cohomologia de Haefliger de foliaciones riemannianas completas
3．学会等名 Seminario de Geometria y Topologia
4．発表年 2019年

1．発表者名 Gilbert Hector, 野澤 啓
2．発表標題 円周上の曲面束のオイラー類が極大な葉層構造について
3．学会等名 葉層構造と微分同相群 2017 研究集会
4．発表年 2017年

1．発表者名 野澤 啓
2．発表標題 On holomorphic Lefschetz number of the Reeb flow of toric Sasakian manifolds
3．学会等名 International Symposium on Differential Models in Geometry（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 野澤 啓
2．発表標題 On the volume of toric Sasakian manifolds
3．学会等名 Toric Topology 2019 in Okayama（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 野澤 啓
2．発表標題 Morse theory and rigidity for transversely affine foliations
3．学会等名 Topological Methods in Dynamics and Related Topics. Shilnikov Workshop（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Gilbert Hector, 野澤 啓
2．発表標題 円周上の曲面束の横断的にアファインな葉層構造について
3．学会等名 接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺
4．発表年 2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考