

令和 3 年 5 月 29 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K14199

研究課題名（和文）離散・超離散方程式の組合せ論的構造の研究による厳密解の構築

研究課題名（英文）Constructing exact solutions to discrete and ultradiscrete equations by studying combinatorial structure.

研究代表者

中田 庸一（Nakata, Yoichi）

東京大学・アイソトープ総合センター・特任助教

研究者番号：40584793

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：超離散差分方程式と呼ばれるmax-plus代数系上の差分方程式系とそれに関連するセルオートマトンモデルの持つ性質について研究を行った。

Laurent性を持つ差分方程式の超離散対応物に関する初期値問題の計算方法について、我々のこれまでの結果を進めてより高階の常差分方程式にも適用できる形に拡張した。また行列式の超離散対応物と考えられる付値マトロイドの組み合わせ論的性質に着目して、ある超離散偏差分方程式の解の証明を行った。また超離散方程式で表されるあるセルオートマトンについて、その力学系的な性質に着目することで十分に時間が経ったあとの系の挙動について説明を行い、系の持つ不思議な現象を説明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ある種の超離散常差分方程式に対して初期値問題を計算するアルゴリズムを開発した際に、結果から超離散系に移行して初めて発生する現象に対して説明が与えられた。これより差分方程式系と超離散系の違いについて、ある角度から説明を与えることができた。

またマトロイドと呼ばれる組合せ論的な性質をもつ対象がどのように可積分方程式と関わるのかについて知見を得た。

セルオートマトンの解析手法についても新たな方法を提案した。この方法は力学系における手法の超離散対応物と考えることができる。これは一般の写像力学系では実現不可能なもので超離散だから実現できたものである。

研究成果の概要（英文）：We studied properties of difference equations on the max-plus algebra and the related cellular automaton models.

We developed a calculation method to solve the initial value problem for some higher ultradiscrete equations which are obtained by the ultradiscretization of the equations with Laurent property. We also proved that some functions expressed as valuated matroids, which are ultradiscretization of determinants, solve an equation according to the combinatorial structure of matroids.

We explained the reason of interesting phenomenon of a cellular automaton expressed as an ultradiscrete equation.

研究分野：可積分系

キーワード：可積分系 セルオートマトン 偏差分方程式 組合せ論

1. 研究開始当初の背景

超離散系とは \max, \pm 演算からなる代数系からなる方程式で、セルオートマトンのダイナミクスを記述するのに使われる。超離散化[1]と呼ばれる操作により既知の微分方程式と関連付けられ、元の方程式が持つ保存量や厳密解など数学的なよい構造を抽出したものだと考えられている。また超離散系はその力学系的性質を厳密に述べることができる場合が多く、超離散系を研究することにより微分方程式の持つ大域的な性質を厳密に説明することができるものと期待される。

超離散系の例として高橋・薩摩によりソリトンの性質を持つセルオートマトンとして箱玉系が提出されたが[2]、このセルオートマトンを記述する方程式は超離散化によりソリトンを持つ非線形波動の方程式と直接関連づけられる。また箱玉系は非線形波動の持つ保存量を無限個持つ性質を保っていることも知られている。

マトロイドは行列を構成するベクトルの一次独立性を抽象化した概念として考えられたものであるが、数学の他分野だけでなく工学の諸問題にも現れるものである[3]。交換公理と呼ばれる定義式は行列式の可積分方程式の基本となっている Plücker 関係式を抽象化したものである。離散凸関数はそれらの概念を一般化したものであり、多くの超離散方程式の解はこの関数のクラスに含まれるものと考えられる[4,5]。また凸関数同士の変換である Legendre 変換の離散対応物によって異なる超離散方程式のソリトン解同士が写り合うことも知られているため、この分野と超離散系には何らかの対応関係があると考えられる。

離散方程式系の初期値問題の解が任意の時刻において、初期値の Laurent 級数で表される現象を Laurent 現象と呼び、Fomin らによるクラスター代数の研究が盛んになるとこの性質は可積分性と深く関わりがあることが知られ、近年離散可積分系においても精力的に研究されるようになった。一方これらの現象は超離散系そのものを対象として研究されることはなかったが、最近我々は $\max, +$ 代数が凸多面体とそれらの間の演算に対応することを発見し、その事実を Laurent 現象が起こる超離散方程式系に適用したところ現象を超離散系のレベルで明快に説明できるだけでなく、Somos-4, 5 方程式において離散方程式のレベルでは明示的に表すことが難しい厳密解を簡潔な形で表した[6]。これは超離散系特有の現象であると考えられ、この手法を様々な超離散方程式に適用することにより様々な方程式系について厳密解を表示できることが期待される。超離散系は離散方程式系の骨格を表しているため、この手法により得られた結果は離散方程式系の解析にも還元できると考えられる。またクラスター代数と関連して現れる非線形な離散方程式の初期値問題に対する一般解の構造、および解であることの証明は非常に組合せ論的な特徴をもっており、同様の手法で他のクラスター代数と関連する方程式について解を得られれば数学的に重要な意味をもつと考える。

2. 研究の目的

研究の目的は離散方程式もしくは超離散方程式と呼ばれる区分線形方程式系の解の構造を組合せ論的手法を使って解明することである。

具体的にはクラスター代数を用いて表されるものをはじめとする離散方程式系、超離散方程式系を対象として、初期値問題の厳密解を得ること、あるいは厳密解が得られなくても超離散特有の可積分系の本質を現した構造を見出すことにある。

さらにはこの手法を他の超離散方程式や離散可積分系へフィードバックすることを目指す。

3. 研究の方法

これまでの結果の延長として Somos-6, 7 sequence をはじめとする 1 変数超離散方程式系に対し、 \max の式を凸多面体で表示することにより、初期値問題の解を与える手順を適用した。離散方程式系では初期値問題では解を有理式で表した際、その次数の成長が多項式オーダーになるかどうかを調べた。また得られた解の成長を調べる可積分性との関係について議論した。

次にこれらの議論が可積分方程式のソリトン解にも適用可能であるか検証を行った。具体的には離散 KdV 方程式および離散 KP 方程式に対して、超離散方程式の解の組合せ構造がどの程度明示的に残るかを調べた。またマトロイドなどの組合せ論的構造を持つ超離散系と関連があると思われるものに対してその関連性を調べた。

これらの得られた解析結果をもとに、物理、生物などで現れるセルオートマトンモデル、工学において max の式で表される現象などへの応用可能性についても調べた。

4. 研究成果

1. Laurent 性を持つ超離散方程式系の初期値問題の解の計算法の提出

これまでの研究成果の延長として解が 4 自由度を持つ Laurent 性を持つ超離散常差分方程式系の初期値問題について解を 4 次元凸多面体で表すことで、初期値の情報を文字として残したまま時間発展した解を計算する方法を提出した。この方法はより高い次元の多面体に対しても適用可能であるため原理的にはより高階の超離散常差分方程式にも適用可能である。

当初計画に則って超離散 Somos-6, 7 方程式にこの方法を適用し解の数値計算の結果から厳密解を得ようとしたが、数値計算の結果多面体の点の数が超離散 Somoe-4,5 と違い、発展に伴い増え続けるため厳密解を記述することが不可能であることが判明した。

オリジナルの Somos-4,5 および Somos-6,7 に関する厳密解はそれぞれ Weierstrass のシグマ関数および種数 2 のリーマン面上の Klein のシグマ関数として表され、時間発展は Jacobi 多様体上では線形な移動をしていることが Hone らにより示されている [7,8]。

このことから超離散 Somos-6,7 方程式でも Jacobi 多様体上の超離散関数として表されると考えたとき、時間発展は Jacobi 多様体の上では線形な移動になると考えられるが、超離散 Somos-4,5 方程式と違って線形に移動する軌道はもとに戻ることがないことが原因であると推察される(一般的に超離散 Somos-4,5 方程式のようにもとの点に戻れることのほうが特殊である)。

今後は上記の考察を厳密に証明することを目指し、特に超離散 Somos-4,5 方程式で一般の初期値に対して Jacobi 多様体上を線形に移動する軌道がもとの点に戻る理由を説明できることを目指す。

この研究結果について

- 国際研究集会 Symmetries and Integrable Differential Equations 13 (九州大学)
 - 研究集会「可積分系数理の深化と展開」(京都大学数理解析研究所)
- にて研究発表を行い、またそれらの結果を論文にまとめ RIMS 講究録別冊に投稿し、掲載許可が出た。

2. 超離散パーマメント型の解が超離散戸田方程式を満たすことの構造に沿った証明法の提出

付値マトロイドとは交換公理と呼ばれる関係式を満たすものである。また行列式に対して付値を取ったものとして解釈することができ、その場合交換公理は行列式を満たす Plücker 関係式から導出される [5]。

Plücker 関係式は行列式型の解が可積分方程式を満たす上で基本的な関係式であり、また付値と超離散化は非常に近いものであるため超離散可積分方程式を理解する上では基本的な関係式ではないかと考えられていた。

またある種の組合せ論的な関数として定義されるものが交換公理を満たすことがすでに知られている [9,10]。

2018 年に長井は超離散パーマメントが超離散戸田方程式を満たすことを解析的に証明した [11]。我々はこの超離散パーマメントこそが付値マトロイドであると考え、上記の交換公理に加えてパーマメント内の大小評価について組合せ論的な評価を行うことで方程式を満たすことの別証明を与えた。

この結果は 2019 年 11 月に九州大学応用力学研究所での研究集会「非線形波動研究の多様性」においてポスターにより発表を行った。

3. Path-preference モデルにおける緩和状態の軌道の挙動についての解析

Elementary Cellular Automaton (ECA) は 2 値を取るサイトが 1 列上に並んだものを系の状態とし、自身の次の時刻の値を自身とその前後 3 近傍の値から決定させる離散力学系である [12]。

ECA184 はそのうちのルールの一つであり、その挙動から車の渋滞を再現するセルオートマトンモデルとして知られている。また同じく渋滞を表すとされる Burgers 方程式から超離散化と呼ばれる極限操作により得られることが知られている [13]。

大田らは転写時の DNA とその上を動く RNA ポリメラーゼ II の挙動を説明するために、Path-preference モデルを提出した[14]。このモデルは ECA184 およびその確率化である TASEP に一部サイト間において分岐と合流を導入したモデルと解釈することができる。

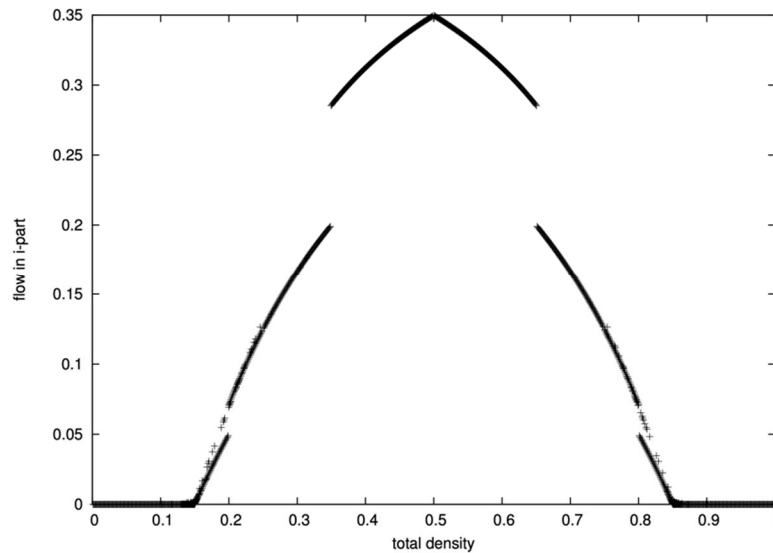


図: Path-preference モデルの流量の不連続な変化

このような分岐と合流がある交通流モデルでは車の密度と流量の関係を図示したときに不連続な変化が発生することは数値計算で確認されている[15]。我々は Path-preference モデルの特殊な場合について、十分時間が経った後の緩和状態の軌道を厳密に解析することで、密度と流量の関係の具体的な式を導出し、このような不連続な変化が起こる理由が密度の変化によって最終的に引き寄せられる極限周期軌道が変わってしまうことにあることを突き止めた。

導出に際して我々はこれらの周期軌道が特定のパターンを必ず通ることに着目したが、これは連続力学系における Poincaré 断面に相当するものであると考えられる。一般に離散力学系では軌道は連続的なものではないので断面を考えることは事実上不可能であるが、従属変数も離散的な値を取るセルオートマトンの場合には状態間の近接関係が自然に定義されるために軌道を連続に近いものとして捉えることができ、このようなアプローチが可能であると考えられる。この方法はより一般的なセルオートマトンに対しても適用可能な場合があると考えられ将来的な発展を期待できる。

参考文献

- [1] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma Phys. Rev. Lett., 76:3247–3250, 1996.
- [2] D. Takahashi, J. Satsuma J. Phys. Soc. Jpn., 59:3514–3519, 1990.
- [3] 室田一雄「離散凸解析」(2001)
- [4] Y. Nakata J. Phys. A: Math. Theor., 44 (2011) 295204.
- [5] Y. Nakata J. Phys. A: Math. Theor., 46 (2013) 265203.
- [6] 中田庸一, 九州大学応用力学研究所講演, 2016年11月
- [7] A. N. W. Hone. Bull. London Math. Soc., 37:161–171, 2005.
- [8] A. N. W. Hone. Appl Anal., 89.4:473–492, 2010.
- [9] N. Shinzawa, Linear Algebra and its Applications, 56 (2016) 445–477.
- [10] F. Rincon, J. Combin. Theory Ser. A. 119 (2012) 14–32.
- [11] Nagai, Hidetomo (2020-04) 数理解析研究所講究録別冊, B78: 199–209
- [12] S. Wolfram, Addison-Wesley, Reading (1994).
- [13] K. Nishinari, D. Takahashi, J. Phys. A: Math. Gen., Vol. 31 (1998) pp.5439–5450.
- [14] Y. Ohta, A. Nishiyama, et al., Phys. Rev. E, 86, 021918 (2012).
- [15] J. G. Brankov, N. C. Pesheva and N. Zh. Bunzarova, arXiv:0803.2625.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Y. Nakata, Y. Ohta and S. Ihara	4. 巻 36
2. 論文標題 Periodic orbit analysis for the deterministic path-preference traffic flow cellular automaton	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 25--51
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13160-018-0328-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

論文"The solution to the initial value problem for the ultradiscrete Somos-4 and 5 equations"がRIMS講義録別冊に掲載決定している(査読あり)。

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------