

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 28 日現在

機関番号：12611

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K14200

研究課題名(和文) ケーラー多様体上のモンジュ・アンペール方程式と正則曲線への応用

研究課題名(英文) Applications of the Monge Ampere equation on Kahler manifolds to entire curves

研究代表者

千葉 優作 (Tiba, Yusaku)

お茶の水女子大学・基幹研究院・准教授

研究者番号：90635616

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：多重劣調和関数のレビ形式が正となる集合(非多重調和領域)がケーラー多様体の位相的、解析的な性質と深く関わることを示した。中でも、ケーラー多様体上の正則ベクトル束のコホモロジーと非多重調和領域上に制限したベクトル束のコホモロジーが、ケーラー多様体の次元の半分より小さい次数の場合に同型や単射を与えることを示した。この結果はハルトークスの拡張定理を部分的に含む。さらにケーラー多様体のド・ラームコホモロジーと非多重調和領域のド・ラームコホモロジーの間の同型や単射を導いた。この結果は古典的なレフシェットの超平面定理の解析的な類似を与えている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多重劣調和関数の非調和領域が空間全体のコホモロジーと関わるという結果は、多変数関数論や複素幾何学に新たな視点をもたらした。非調和領域は複雑であり、何か統一的な性質を持つということはこれまでの研究では触れられていなかった。しかし本研究により、非多重調和領域はケーラー多様体全体の性質と深い関わりが明らかになり、この結果は今後さまざまな数学の研究分野に応用できると期待できる。例えば、複素力学系や正則曲線の定めるアールフォルスカレントの研究、さらにトロピカル幾何学に応用を持つと言える。

研究成果の概要(英文)：We show that the set where the Levi form of a plurisubharmonic function on Kahler manifolds does not vanish (non-pluriharmonic locus) has a relation to the topology and analytic properties of the Kahler manifolds. Especially, we show that there exist isomorphisms and an injective map from a cohomology of a holomorphic vector bundle of Kahler manifolds to a cohomology of the restriction of holomorphic vector bundle on non-pluriharmonic locus. This result implies some special case of the Hartogs extension theorem. We also show that the restriction map from the de Rham cohomology of Kahler manifolds and that of non-pluriharmonic locus are isomorphic if the degree of cohomology is smaller than the dimension of the Kahler manifold. This result is an analytic analogy of the Lefschetz hyperplane theorem.

研究分野：多変数関数論

キーワード：多重劣調和関数 ケーラー多様体 正則ベクトル束

1. 研究開始当初の背景

当初はモンジュ・アンペール方程式の研究が進み、滑らかではない解の性質を調べる研究が多くなされていた。特に、モンジュ・アンペール方程式の解のレギュラリティーや境界での解の振る舞い、またケーラー多様体からエルミート多様体への既存の研究の一般化、またカラビ予想（ヤウの定理）の一般化などが熱心にされていた。申請者はこれまでに多重劣調和函数のモンジュ・アンペールカレントがサブレベル集合のシロフ境界と関係することを示していた。この研究や申請した本研究のようにモンジュ・アンペールカレントの台集合や多重劣調和函数のレビ形式の台集合を調べることはほとんどされていなかったと言える。

2. 研究の目的

多重劣調和函数のレビ形式の台集合や、より一般的なモンジュ・アンペールカレントの台集合のもつ位相的・解析的な性質を明らかにする。特に全体の空間のコホモロジーといった位相的な不変量が台集合の位相的な不変量とどのように関連しているかを調べる。また本研究の結果をネヴァンリンナ理論や小林双曲多様体などに応用して、正則曲線の性質を調べる。正則曲線とは複素平面から複素多様体への正則な写像であり、無限遠点において複雑な挙動をするため、代数的な手法でアプローチすることが困難である。正則曲線の代わりに、正則曲線に付随するアールフォルスカレントを考える。アールフォルスカレントの台集合、すなわち正則曲線の像が多重劣調和函数のレビ形式の台集合で与えられる場合に、本研究の結果を応用し、正則曲線の性質を調べる。

3. 研究の方法

ヘルマンダーによる L^2 ディーバー方程式の解法によりケーラー多様体上の正則切断や調和形式を構成し、コホモロジーを計算する。 L^2 ディーバー方程式を解く際にウェイト関数として多重劣調和函数のレビ形式が消えない集合上で値が大きくなる関数を取り、関数のノルムをコントロールすることができる。ウェイトを調べたい集合上で発散させることにより、解がその集合上では常に零となるようにでき、解の台集合を調整することが可能となる。また多重劣調和函数が凸関数といった特別な場合は、モンジュ・アンペールカレントの台集合が凸集合の複素端点とどのように関連するかをイエンセン測度やショケー理論などの関数解析的な方法が新たに使えるので、ディーバー方程式によらないアプローチも可能である。

4. 研究成果

多重劣調和関数のレビ形式が正となる集合（非多重調和領域）がケーラー多様体の位相的・解析的な性質と深く関わることを示した。特にケーラー多様体上で次の結果を得た：整係数コホモロジーに属する正な特異ケーラー形式の非多重調和領域を考える。正則ベクトル束のコホモロジーと、非多重調和領域に制限したベクトル束のコホモロジーが、ケーラー多様体の次元の半分より小さい次数の場合に同型や単射を与える。この結果はハルトークスの拡張定理を部分的に含む。また、正則関数の拡張であれば、モンジュ・アンペールカレントの台集合上の正則関数も拡張できることを示した。モンジュ・アンペールカレントの台集合は非多重調和領域の一般化であり、コホモロジーの間の0次の同型に対応する。これは新たなタイプの拡張定理である。さらにケーラー多様体のド・ラームコホモロジーと非多重調和領域のド・ラームコホモロジーの間の同型や単射を導いた。この結果は古典的なレフシェットの超平面定理の解析的な類似を与えている。さらに同様の結果をシュタイン多様体の場合も成り立つことを示した。正確な主張は次の通りである：シュタイン多様体上の exhaustive な多重劣調和函数に対して、その非多重調和領域を考える。正則ベクトル束のコホモロジーと、非多重調和領域に制限したベクトル束のコホモロジーが、シュタイン多様体の次元の半分より小さい次数の場合に同型や単射を与えるこれらの研究結果は、複素力学系のジュリア集合の研究、正則曲線のアールフォルスカレントの研究、トロピカル幾何学におけるトロピカル超曲面のコホモロジーの研究などに応用できると考えられる。また多重劣調和函数が凸関数となる場合は、そのモンジュ・アンペールカレントの台集合は、

多重劣調和函数のレベルセットに正則円板が含まれる集合と一致することを示した。この結果は、小林双曲距離による測地線を調べる際に役立つ。小林双曲距離ではどんなに近い2点間でも測地線が1本より多く存在することがある。このような集合がモンジュ・アンペールカレントの台集合で表せることを示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

| | |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名 Yusaku Tiba | 4. 巻 293 |
| 2. 論文標題 Cohomology of non-pluriharmonic loci | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift | 6. 最初と最後の頁 1403-1414 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-019-02273-1 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|------------------------|
| 1. 著者名 Yusaku Tiba | 4. 巻 121 |
| 2. 論文標題 On a convex level set of a plurisubharmonic function and the support of the Monge-Ampere current | 5. 発行年 2018年 |
| 3. 雑誌名 Mathematici Annales Polonici Mathematici | 6. 最初と最後の頁 251--262 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4064/ap180423-14-8 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|---------------------|
| 1. 著者名 Yusaku Tiba | 4. 巻 298 |
| 2. 論文標題 Cohomology of vector bundles and non-pluriharmonic loci, | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 athematische Zeitschrift | 6. 最初と最後の頁 1--13 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-020-02634-1 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計12件（うち招待講演 1件/うち国際学会 3件）

| |
|--|
| 1. 発表者名 Yusaku Tiba |
| 2. 発表標題 Asymptotic estimates of holomorphic sections on Bohr-Sommerfeld Lagrangian submanifolds |
| 3. 学会等名 日本数学会年会 |
| 4. 発表年 2021年～2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Yusaku Tiba |
| 2. 発表標題 Cohomology of vector bundles and non-pluriharmonic loci |
| 3. 学会等名 Grauert theory and recent complex geometry (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2020年～2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 千葉優作 |
| 2. 発表標題 Cohomology of vector bundles and non-pluriharmonic loci |
| 3. 学会等名 日本数学会 |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 千葉優作 |
| 2. 発表標題 Cohomology of vector bundles and non-pluriharmonic loci |
| 3. 学会等名 複素解析幾何セミナー |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 千葉優作 |
| 2. 発表標題 The cohomology of non-pluriharmonic loci |
| 3. 学会等名 日本数学会2018年度秋季総合分科会 |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 千葉優作 |
| 2. 発表標題 The cohomology of non-pluriharmonic loci |
| 3. 学会等名 多変数関数論冬セミナー |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 千葉優作 |
| 2. 発表標題 The cohomology of vector bundles and non-pluriharmonic loci |
| 3. 学会等名 Workshop on on Holomorphic Maps, Pluripotentials and Complex Geometry (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|-------------------------------|
| 1. 発表者名 千葉優作 |
| 2. 発表標題 非多重調和領域上の正則関数の拡張定理 |
| 3. 学会等名 広島複素解析セミナー (広島大学) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 千葉優作 |
| 2. 発表標題 Cohomology of non-pluriharmonic loci |
| 3. 学会等名 複素解析幾何セミナー (東京大学) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 千葉優作 |
| 2. 発表標題 Cohomology of non-pluriharmonic loci |
| 3. 学会等名 幾何学セミナー（大阪大学） |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Yusaku Tiba |
| 2. 発表標題 The extension of holomorphic functions on a non-pluriharmonic locus |
| 3. 学会等名 Pacific Rim complex-Symplectic Geometry conference（国際学会） |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 千葉 優作 |
| 2. 発表標題 The extension of holomorohic functions on a non-pluriharmonic locus |
| 3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会 |
| 4. 発表年 2017年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

| | |
|---|--------------------|
| 国際研究集会 HAYAMA Symposium on Complex Analysis in Several Variables XXI | 開催年 2019年～2019年 |
|---|--------------------|

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|