

令和 2 年 5 月 20 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K14201

研究課題名(和文) 群作用とフォンノイマン環

研究課題名(英文) Group actions and von Neumann algebras

研究代表者

磯野 優介 (Isono, Yusuke)

京都大学・数理解析研究所・特定助教

研究者番号：80783076

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：離散群の測度空間への群作用から作るフォンノイマン環の構造を調べた。特に作用が測度を保たない場合は、環がIII型という難しいクラスになり、富田・竹崎理論を用いた研究が必要である。本研究で得られた最も重要な結果は以下の二つである。まずPopaの技術と呼ばれる方法を、III型フォンノイマン環に対して一般化した。これは技術面で最も重要であり、またこれまでに得られたどの一般化よりも優れた形である。次に離散群の測度空間への作用を構成する新しい方法を発見した。これはアフィン変換を用いる方法で、群の幾何学的情報(コサイクル)と密接に関係している。

研究成果の学術的意義や社会的意義

離散群の測度空間への作用は、測度を保つ作用が広く研究されている。これは測度を保たない群作用の研究が極めて難解である事が理由であり、よって多くの事が分かっていない。しかし一方で、幾何学的、または確率論的な着眼点から自然にそのような作用が現れる事もあるため、その研究には重要な意義がある。私の研究は、そのような作用に対する技術的な進展と具体例の構成であり、これはこの方面における基礎的な研究の一つとみなせらるだろう。

研究成果の概要(英文)：I am interested in von Neumann algebras arising from group actions on measure spaces. In the case that the action does not preserve any measure, the algebra becomes type III, which is the most difficult class in von Neumann algebras. I obtained the following two results.

First, I succeeded to generalize Popa's techniques to type III algebras. This is a technical result but is the most important part of my research.

Second, I established a new way of constructing group actions. This uses affine actions of groups, hence the structure of the action is closely related to geometry of the group.

研究分野：作用素環論

キーワード：フォンノイマン環 富田・竹崎理論 離散群の非特異作用 エルゴード理論 アフィン変換

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

私の専門は作用素環論, とくにフォンノイマン環論で, これはヒルベルト空間上の有界線形作用素のなす環の部分環について調べるものである. 可換な場合には L 関数環と同型になるため, 非可換積分論と呼ばれることもある.

特に重要な例として「群作用環」, すなわち離散群の測度空間への群作用から作られるフォンノイマン環がある. 簡単に言えば, 作用する離散群と L 関数環により生成され, 環構造に群作用の情報が反映されるものだ. 群や作用の情報が, どのように群作用環の(フォンノイマン環としての)構造に影響するかに興味がある. 私が具体的に興味を持っているのは, 群作用に対する不変測度がない場合の研究についてだ. そのような作用については具体例も含め分かってない事が数多くある. フォンノイマン環論的視点で見ると, 対応する群作用環は III 型と呼ばれるクラスになる. III 型環の構造は極めて難解で, このような環の研究には富田・竹崎理論が必要である.

2. 研究の目的

上で述べた III 型の群作用環に対して, (フォンノイマン環としての) 構造定理を示す事, さらにそれを用いて, エルゴード理論的な性質を研究する事が本研究の主目的である. 特に近年のフォンノイマン環の中心である rigid な性質の研究に興味がある. これは初期のフォンノイマン環論で研究された従順性という概念と対照的な性質で, 例えば具体的に作った群作用環の「固い」性質を見る事で, 従順な場合(これは柔らかい環である)とはっきり異なる現象が起きる事が分かる. このような研究は 2000 年以降のフォンノイマン環論の中心であり, 多くの重要な研究がある. III 型の群作用環に対しても同様の視点からの研究をする事に興味がある.

3. 研究の方法

実際に rigid な構造についての研究をする上では, 「Popa の技術」と呼ばれるものを III 型フォンノイマン環に対して実現する事が最も重要である. これは興味がある環の部分環についての主張であり, 二つの部分環がいつユニタリ共役で移りあうか, という問題の(極めて実用的な)十分条件を与えるものだ. III 型フォンノイマン環に対してこれを実現するため, 次の二つの視点で研究を行う予定だ.

一つ目の視点: 超積と呼ばれる「環の漸近的な振る舞い」を調べる対象を用いる. III 型でない場合は, 実際に非自明な関係がある事が知られている. これを III 型の場合にもある程度拡張する事には成功しており, これを足掛かりに進めていく.

二つ目の視点: 富田・竹崎理論で現れる連続核を用いる. これは III 型環から作る「III 型でない環」である. 後者については Popa の技術が使えるから, 連続核についての理解を深める事で III 型環の場合にも適用出来る方法を探したい.

4. 研究成果

本研究においては多くの重要な結果を得たが, その中でも特に重要な次の二点について解説する. 一つ目は「Popa の技術」が III 型環に対して想定以上に上手く再現出来た事, 二つ目は具体例の構成において全くの新しい非特異作用を発見出来た事である. 以下にそれぞれを詳しく見る.

まず「Popa の技術」についてだが、上で述べた二つ目の視点（連続核を用いる方法）が上手くいった。まず III 型フォンノイマン環にはモジュラー作用と呼ばれるものがいつでも付随しており、これが環の（III 型としての）情報を概ね持っている。これを踏まえて、上で述べたように Popa の技術による部分環の埋め込みが起きたとする。この時、二つの部分環それぞれに対してモジュラー作用を上手く選ぶ事で、埋め込みがモジュラー作用の情報を含めて成り立つように取り直す事が出来る。そしてこのモジュラー作用の情報を合わせる事で、Popa の技術に現れる実用的な条件の自然な拡張を得る事が出来る。さらにこの条件が、連続核の上で起きている Popa の技術の現象と同値になる。まとめると、Popa の技術による現象が起きる事の必要十分条件は、連続核の上で同様の現象が起きる事と同値である。これは想定をはるかに超える美しい現象であり、私自身も強く驚いた。さらに詳しく言えば、本当の意味では同値が成り立たない例を発見しており、実際の同値の主張にはテンソル積のトリック（いつでも使える）が混ざっている。これはこの定理が非自明な理由によって成り立っている事の証拠であると思う事も出来るだろう。この Popa の技術の拡張によって得られたいくつかの応用の中で、最も興味深いものについて簡単に解説する。まず W^* -superrigidity とは、群作用環の「フォンノイマン環としての構造」を見る事で、もとの「群作用の構造」を復元できるような現象の事である。これは 2000 年以降のフォンノイマン環論で最も注目されている現象であり、近年多くの具体例が得られている。私は上記の Popa の技術を用いて、「離散群のフォンノイマン環への作用」について W^* -superrigidity の現象を得る事に成功した。このような例は他に一つも知られていない。証明には III 型環にしか現れない情報を使っており、つまりより難解な III 型フォンノイマン環の構造を使って初めて得られる例である。非常に興味深い例であると言えるだろう。

次に二つ目の、具体例の構成について説明する。まず離散群の非特異作用を具体的に構成する方法というのはあまり知られていない。（ただしそのような作用はいくらでもたくさんある、というのが専門家の共通の意見である。）私は荒野・Marrakchi 両氏との共同研究で、そのような作用を構成する新たな方法を発見した。これは群のヒルベルト空間への作用（アフィン等長変換）を用いる方法である。

これについて解説するため、まず離散群のユニタリ作用の場合から考える。一般にユニタリ作用を用いて測度空間への作用を構成するよく知られた方法が Gaussian 作用と呼ばれるものだ。これは要するに、ヒルベルト空間から測度空間への関手を用いて、ヒルベルト空間への作用を測度空間への作用とみなす方法である。これは非常に古典的な作用で広く研究されているが、一方でこの構成では測度を保つ作用しか現れない。そこで我々は、この操作をユニタリ作用からアフィン変換の場合に拡張した。アフィン変換とはユニタリ作用とコサイクルに分解するのだが、我々はこのコサイクルの部分が（測度を保たない）作用を与えるという事を示した。これは Gaussian 作用の自然な拡張であり、この新しい作用も Gaussian 作用と呼ぶ事にする。

我々はこの作用に対して、作用の基本的な情報であるエルゴード性や型の分類の研究を行った。特に型の分類においては、I 型（最も自明な作用）が現れるための必要十分条件に関連する定数を定め、この定数がコサイクルの幾何学的な数値との間に関係を持つ事を示した。これはつまり、測度空間への作用の性質が、そのままコサイクルの幾何学的な情報として現れるという意味であり、非常に興味深い現象である。このほかにも多くの基本的な性質について調べた。

一般に測度を保たない作用の具体的な研究は非常に難しい。例えば、測度を保たないベルヌーイ型作用は 1970 年代から研究が始まったが、いくつかの基本的結果を除いてその理解が進んだのは 2010 年代である。ここでいう理解とは、単にエルゴード性や型の分類などの基本的な性質

であり、それを示すために必要な技術が得られるまでに多くの時間を要したという事だ。我々の構成した Gaussian 作用は、証明に閑手性を使う事が出来る点でベルヌーイ作用よりも研究がしやすい側面もあり、すでに多くの基本的な構造が示されている。一方で、群論やヒルベルト空間論と関係した自然な問題がいくらかでも考えられるが、その多くは全くの未知の問題であり、多くが難解であると思われる。フォンノイマン環論との関連も踏まえ、この作用についての理解を深める事は重要な問題であろう。このような重要な作用を我々の手で構成し調べる事が出来た事をうれしく思っている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Cyril Houdayer, Yusuke Isono	4. 巻 150
2. 論文標題 Factoriality, Connes' type III invariants and fullness of amalgamated free product von Neumann algebras	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.	6. 最初と最後の頁 1495--1532
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/prm.2018.152	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Martijn Caspers, Yusuke Isono, Mateusz Wasilewski	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 L2-Cohomology, Derivations, and Quantum Markov Semi-Groups on q-Gaussian Algebras	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Int. Math. Res. Not.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnaa044	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yusuke Isono	4. 巻 12
2. 論文標題 Cartan subalgebras of tensor products of free quantum group factors with arbitrary factors	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Anal. PDE	6. 最初と最後の頁 1295-1324
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/apde.2019.12.1295	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yusuke Isono	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 On fundamental groups of tensor product II ₁ factors	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Inst. Math. Jussieu.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/S1474748018000336	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yusuke Isono	4. 巻 276
2. 論文標題 Unique prime factorization for infinite tensor product factors	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Funct. Anal.	6. 最初と最後の頁 2245-2278
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jfa.2018.07.015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 磯野優介
2. 発表標題 Unique prime factorization for infinite tensor product factors
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 磯野優介
2. 発表標題 Tensor product decompositions and rigidity of full factors
3. 学会等名 RIMS研究集会「作用素環論の最近の進展」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 磯野優介
2. 発表標題 Unitary conjugacy for type III subfactors and W^* -superrigidity
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yusuke Isono
2. 発表標題 Popa's intertwining theory for type III factors
3. 学会等名 Classification Problems in von Neumann Algebras (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 磯野優介
2. 発表標題 Ergodic theory of affine isometric actions on Hilbert spaces
3. 学会等名 RIMS研究集会「作用素環の分類理論における新展開」(招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yusuke Isono
2. 発表標題 Prime factorization for infinite tensor product factors
3. 学会等名 Von Neumann algebras and measured group theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 磯野優介
2. 発表標題 Deformation/rigidity理論とIII型フォンノイマン環
3. 学会等名 日本数学会特別講演(招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~isono/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----