

令和 4 年 6 月 3 日現在

機関番号：17401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K14202

研究課題名（和文）確率変数列の法則収束に対する関数解析的研究

研究課題名（英文）Studies on convergence in law of random variables from the viewpoint of functional analysis

研究代表者

永沼 伸顕 (Naganuma, Nobuaki)

熊本大学・大学院先端科学研究部(工)・准教授

研究者番号：60750669

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、4次モーメント定理とよばれ定理を中心に研究を進めた。4次モーメント定理とは、あるクラスの確率変数列の法則収束を2次と4次のモーメントの収束により特徴づける定理である。一般には、確率変数の法則収束を有限個のモーメントの収束で特徴付けることはできないが、クラスを限定すればそれが可能であるという定理である。主張の簡単さと応用の幅の広さから多くの研究が進められている。本研究では4次モーメント定理の成立の理由の解明を試みた。さらに、4次モーメント定理を用いて確率微分方程式の近似解の振る舞いを考察した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

どのような条件で確率変数列が収束するかという基本的な問題に対して、あるクラスの確率変数列に対しては簡明な答えを与えたのが4次モーメント定理である。

4次モーメント定理の応用として、確率微分方程式の近似理論の構築がある。確率微分方程式とは、偶然性を含む現象を記述するために用いられる方程式である。この方程式は解の明示的な表現を持たないので、実際の現象を考察するには数値計算が必要となる。この数値計算の理論的な保証を与えるのが近似理論であり、その基礎に4次モーメント定理がある。

本研究では、4次モーメント定理の成立理由の解明と確率微分方程式の近似理論の構築を行った。

研究成果の概要（英文）：A central topic of this study is the fourth moment theorem, which ensure that convergence in law of random variables belonging to some class follows from the second and fourth moment of the random variables. In general, the convergence in law cannot be characterized by convergence of some moments of random variables, while the theorem ensures it for random variables in some class. Many researchers are interested in this theorem due to simplicity of the statement and wide range application. In this study, we tried to give an answer to the question why the theorem holds. We studied approximation of stochastic differential equation as an application of the fourth moment theorem.

研究分野：確率解析

キーワード：4次モーメント定理 Malliavin解析 確率解析 確率微分方程式 ラフパス解析

1. 研究開始当初の背景

確率変数列の法則収束を保証する古典的な手法にモーメント法がある。これは、すべての次数のモーメントの収束と付加的条件により確率変数列の法則収束を導くものである。一方で、4次モーメント定理とは、固定された Wiener カオスに属する確率変数列の法則収束を2次と4次のモーメントの収束で特徴づける定理であり、Nualart-Peccati (2005) によって初めて示された。ふたつを比較すると、4次モーメント定理はたったふたつのモーメントを計算することにより、法則収束が得られるので応用上非常に使いやすい。さらに、4次モーメント定理と Stein の方法を組み合わせることにより、一般には同値ではない確率変数列の収束の同値性を示すことができる。このように応用が容易かつ強い結果を導くことができる点で4次モーメント定理は非常に興味深い定理と言える。

4次モーメント定理のひとつの応用として非整数 Brown 運動により駆動される確率微分方程式の近似誤差の研究がある。近似誤差の研究の歴史は古く、駆動過程が Brown 運動やマルチンゲールの場合には盛んに研究が行われていた。そこではマルチンゲール理論を基礎とした確率積分の列の収束を主要な道具として伊藤解析の枠組みで議論が展開されている。しかし、非整数 Brown 運動は一般にマルチンゲールとはならないので、これらの研究を駆動過程が非整数 Brown 運動の場合に適用することはできず、別の手法が必要であった。その手法を与えるのが4次モーメント定理であり、筆者、筆者と会田茂樹氏(東京大学)が1次元の場合に4次モーメント定理を用いて近似誤差の漸近挙動を決定していた (Naganuma (2016)、Aida-Naganuma (2020))。

2. 研究の目的

前段で述べたように、4次モーメント定理を用いることで、2個のモーメントの収束による法則収束の特徴付けや通常では得られない同値性を導くことができるのは、確率変数列が固定された Wiener カオスに属しているからである。この仮定の意味を解き明かすことが本研究の目的である。そのために、「任意のふたつの偶数次モーメントから法則収束が従うか？」という問題を考えることにした。これは4次モーメント定理が示されて以来の問題であり、肯定的に解決されると考えられている。この問題の解決を通じて4次モーメント定理の理解を深めることを目的とする。

非整数 Brown 運動により駆動される確率微分方程式の近似誤差の漸近挙動を多次元の場合に決定することも本研究の目的である。少し詳しく述べる。非整数 Brown 運動は通常の Brown 運動の Gauss 性に注目した拡張である。非整数 Brown 運動は Hurst 定数 $H \in (0,1)$ によって決まり、 $H = 1/2$ のときが通常の Brown 運動である。そして $H \neq 1/2$ のときにはマルチンゲール性を持たない。そのため $H \neq 1/2$ のときは伊藤解析を使うことができず、方程式の定式化には別の手法を用いる。今、非整数 Brown 運動は H より少し悪い Hölder 連続性をもつことに注目して、 $H > 1/2$ のときは Young 積分、 $H < 1/2$ のときはラフパス解析を用いて方程式を定式化することが一般的である。本研究では、 $H < 1/2$ のときにラフパス解析を用いて定式化される確率微分方程式の解を各種の方法で近似した場合の近似誤差の漸近挙動を決定することを目的とする。

3. 研究の方法

4次モーメント定理が成立する理由を解明するために、本研究では解析的な手法をとることにした。これは Ledoux (2012) により提案され、Azmoodeh-Campese-Poly (2014) や Azmoodeh-Mal icet - Mi joule-Poly (2016) において成果を挙げた手法であった。特に、Azmoodeh-Mal icet - Mi joule-Poly (2016) では、2次と任意の偶数次のモーメントの収束により、法則収束を特徴づけており、有望な研究手法と考えていた。本研究ではこの路線を踏襲し、任意のふたつの偶数次モーメントから法則収束が従うという予想の解決を目指した。これが解決できれば4次モーメント定理の理解が深まると考えられる。

確率微分方程式の近似誤差の漸近挙動の研究では4次モーメント定理が基礎になる。具体的には、ラフパス解析を用いて定式化される確率微分方程式の解析では、非整数 Brown 運動の重複積分が重要な役割を果たすが、それは低次の Wiener カオスに属するものである。この重複積分を4次モーメント定理を用いて解析することになる。しかし、ラフパス解析を用いて定式化された確率微分方程式の近似誤差の解析は先行研究が少なく、王道というべき手法はないように見える。具体的には、近似誤差の主要項は4次モーメント定理を用いて決定するが、それよりも小さい誤差の部分の評価を行うことが難しく、新たな手法を考える必要がある。これについては研究成果で述べることにする。

上記を実行するにあたって、研究集会へ参加しての情報収集、共同研究者との研究討論、書籍や論文による知見の収集を行った。

4. 研究成果

本研究では、4 次モーメント定理の理解、近似誤差の漸近挙動の解析の他に、非衝突過程の分布密度の性質の研究、非整数 Brown 運動により駆動される確率微分方程式の解の性質の研究を行った。研究成果を順に述べていく。

(1) 4 次モーメント定理の若干の一般化について

研究開始当初は、Azmoodeh-Maliget-Mijoule-Poly (2016)らの手法により研究を進めた。彼らの研究を精密化していく中で、彼らの手法の適用範囲が明確になり、彼らの手法では任意のふたつの偶数次モーメントから法則収束が従うことを示すことは不可能であることが判明した。

そこで、3 個以上のモーメントにより法則収束の特長付けは可能かという少し弱い形の問題を考えた。この研究により、Azmoodeh らの結果には含まれない法則収束の特徴付けを得ることができた。基本的なアイデアは Azmoodeh らの論文から借りるものの、証明の中で現れる多項式に注目すべき性質があるように思われる。また、計算機による計算と手計算を組み合わせた証明で他にはあまり見られない証明となっている。ここで得られた特徴付けでは、当初の目標には到達できていないものの、論文として投稿した。

(2) 非整数 Brown 運動により駆動される確率微分方程式の近似誤差の漸近挙動の研究

通常の Brown 運動により駆動される確率微分方程式の研究は古くから盛んに行われ、Euler-Maruyama 近似、Crank-Nicolson 近似などが提唱され近似誤差の漸近挙動も決定されていた。本研究では、これらの近似手法を非整数 Brown 運動により駆動される確率微分方程式に対して適用した場合を考察した。

本研究では、確率微分方程式の解とその近似過程を補完する確率過程を導入し、その性質を研究することで初期の目的を達成する方針を取る。漸近挙動の解析では 4 次モーメント定理を使っている。この研究を進める中で確率微分方程式の解の Malliavin の意味での微分可能性の別証明やその Young 積分による表示なども得ることができた。また Euler-Maruyama 近似や Crank-Nicolson 近似などを統一的に扱うことができる点も本研究の強みである。これらをまとめて論文を投稿予定である。

なお本研究とは独立に Hu, Liu, Nualart, Tindel からも同種の問題を考えているが、手法は全く異なる。

本研究は会田茂樹氏(東京大学)との共同研究である。

(3) 非衝突過程の分布密度の存在と滑らかさに関する研究

Dyson Brown 運動などを典型例とする非衝突過程の分布密度の存在と滑らかさに関する研究について述べる。Brown 運動の汎関数について、その分布密度の存在や滑らかさに関して Malliavin 解析が有効に働くことはよく知られている。例えば、滑らかな係数をもつ確率微分方程式の解が滑らかな分布密度をもつことが知られている。一方で、Dyson Brown 運動を確率微分方程式により記述すると、非衝突性を表現するために特異性をもつドリフト項が現れる。本研究では、Dyson Brown 運動のように特異なドリフト項をもつ確率微分方程式の解が連続な分布密度をもつことを示した。本研究では、Florit-Nualart(1995)や Naganuma(2013)が扱った局所非退化性の概念を用いて証明を与えた。その際に、隣り合う粒子の距離の負冪のモーメントの評価がひとつの鍵になり、それは Girsanov 変換を用いて示される。

本研究は、田口大氏(当時大阪大学,元岡山大学)との共同研究であり、2020 年に Stochastic Processes and their Applications から論文として出版された。

(4) 非整数 Brown 運動により駆動される確率微分方程式の解の性質に関する研究

この研究では、Hurst 定数 $1/4 < H < 1/2$ をもつ非整数 Brown 運動により駆動される確率微分方程式の解を対象に研究を行った。この方程式の解に分布密度が存在することが知られており、その分布密度の短時間での漸近挙動も限られた状況では知られていた。本研究では、分布密度の漸近挙動をできる限り一般的な形で示した。この結果は Ben Arous(1988)が導いた Brown 運動により駆動される場合の結果の非整数 Brown 運動への拡張となっている。証明は、Malliavin 解析とラフパス解析の双方で得られた結果を巧妙に組み合わせたものである。

本研究は、稲浜讓氏(九州大学)との共同研究であり、2021 年に Nagoya Mathematical Journal から論文として出版された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 INAHAMA YUZURU, NAGANUMA NOBUAKI	4. 巻 243
2. 論文標題 ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE DENSITY FOR HYPOELLIPTIC ROUGH DIFFERENTIAL EQUATION	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 11～41
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/nmj.2019.29	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shigeki Aida, Nobuaki Naganuma	4. 巻 57
2. 論文標題 Error analysis for approximations to one-dimensional SDEs via the perturbation method	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Osaka J. Math.	6. 最初と最後の頁 381～424
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.18910/75919	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Naganuma Nobuaki, Taguchi Dai	4. 巻 130
2. 論文標題 Malliavin calculus for non-colliding particle systems	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Stochastic Processes and their Applications	6. 最初と最後の頁 2384～2406
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.spa.2019.07.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hoshino Masato, Inahama Yuzuru, Naganuma Nobuaki	4. 巻 22
2. 論文標題 Stochastic complex Ginzburg-Landau equation with space-time white noise	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Electron. J. Probab	6. 最初と最後の頁 68ページ
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1214/17-EJP125	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計16件（うち招待講演 7件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 永沼伸顕
2. 発表標題 非整数Brown運動により駆動される確率微分方程式に関する幾つかの研究
3. 学会等名 熊本大学談話会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 永沼伸顕
2. 発表標題 4次モーメント定理の一般化について
3. 学会等名 九州確率論セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 永沼伸顕
2. 発表標題 4次モーメント定理の一般化について
3. 学会等名 岡山 確率論ワークショップ
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 永沼 伸顕
2. 発表標題 Asymptotic expansion of the density for hypoelliptic rough differential equation
3. 学会等名 阪大確率論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nobuaki Naganuma
2. 発表標題 Asymptotic expansion of the density for hypoelliptic rough differential equation
3. 学会等名 Stochastic Processes and their Applications 2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nobuaki Naganuma
2. 発表標題 Asymptotic expansion of the density for hypoelliptic rough differential equation
3. 学会等名 Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 永沼 伸顕
2. 発表標題 Malliavin calculus for Dyson Brownian motions
3. 学会等名 関西確率論セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 永沼 伸顕
2. 発表標題 Malliavin calculus for Dyson Brownian motions
3. 学会等名 福岡大学確率論セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 永沼 伸顕
2. 発表標題 Asymptotic expansion of the density for hypoelliptic rough differential equation
3. 学会等名 霧島確率論セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Nobuaki Naganuma
2. 発表標題 Asymptotic expansion of the density for hypoelliptic rough differential equation
3. 学会等名 Okayama Workshop on Stochastic Analysis 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 永沼 伸顕
2. 発表標題 Asymptotic expansion of the density for hypoelliptic rough differential equation
3. 学会等名 新潟確率論ワークショップ
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 永沼 伸顕
2. 発表標題 Wienerカオスの最近の展開
3. 学会等名 確率論ヤングサマーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 永沼 伸顕
2. 発表標題 Bessel型確率過程の分布密度について
3. 学会等名 福岡大学確率論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 永沼 伸顕
2. 発表標題 Malliavin calculus for Dyson Brownian motions
3. 学会等名 関西大学 確率論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 永沼 伸顕
2. 発表標題 4次モーメント定理とその確率微分方程式の解の近似理論への応用
3. 学会等名 確率論早春セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Nobuaki Naganuma
2. 発表標題 Malliavin calculus for Dyson Brownian motions
3. 学会等名 Workshop on "Mathematical finance and related issues"（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------