

令和 4 年 6 月 13 日現在

機関番号：22604

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K14207

研究課題名（和文）Besov型関数空間とTriebel-Lizorkin型空間の実解析的研究

研究課題名（英文）Research of Besov and Triebel-Lizorkin type spaces by real analytic methods

研究代表者

野井 貴弘 (Noi, Takahiro)

東京都立大学・理学研究科・客員研究員

研究者番号：90736555

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,600,000円

研究成果の概要（和文）：多くの関数空間を包括していると考えられる一般トリebel・リゾルキン・モレー空間と一般ベゾフ・モレー空間に対して、差分による特徴づけやトレース作用素の有界性を示した。荷重付き一般トリebel・リゾルキン・モレー空間と荷重付き一般ベゾフ・モレー空間においては、作用素の有界性を調べる際に重要な道具となりえる原子分解やトレース作用が有界となるための条件を得た。また、変動指数の枠組みにおける荷重理論の整備・構築に取り組み、荷重付き変動指数ルベグ空間および荷重付き変動指数ソボレフ空間において、複素補間空間やウェーブレットによる特徴づけ、原子分解に関する結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ベゾフ型関数空間およびトリebel・リゾルキン型関数空間はいずれもパラメータを適切に調整することで、ルベグ空間などの基本的な関数空間と同一視することができるという点で重要な研究対象となる関数空間である。本研究課題では主に、一般トリebel・リゾルキン・モレー空間と一般ベゾフ・モレー空間に対して作用素の有界性を調べる際に重要な道具となりえる原子分解の結果やトレース作用が有界となるための条件を得た。これらの結果はルベグ空間などの基本的な関数空間における結果の拡張であり、多くの場面で有用となりえる結果である。

研究成果の概要（英文）：Generalized Besov-Morrey spaces and generalized Triebel-Lizorkin-Morrey spaces can be thought of as comprehending many function spaces, such as Lebesgue spaces. For these spaces, we obtained the results of characterization by differences and the boundedness of trace operator. In addition, we obtained the results of atomic decompositions and the condition of the boundedness of trace operator, which are important tools for studying the boundedness of operators in generalized Triebel-Lizorkin-Morrey spaces and generalized Besov-Morrey spaces. We obtained the results of complex interpolation, wavelet characterization, and atomic decomposition for weighted variable exponent Lebesgue spaces and weighted variable exponent Sobolev spaces.

研究分野：調和解析

キーワード：ベゾフ空間 トリebel・リゾルキン空間 変動指数をもつ関数空間

## 1. 研究開始当初の背景

ルベグ空間などの基本的な関数空間を一般化した関数空間として、ベゾフ型関数空間とトリーベル・リゾルキン型関数空間が知られており、研究開始当初では、このような関数空間について、差分による特徴づけや Fourier multiplier, 擬微分作用素といった作用素の有界性などが研究されていた。しかしながら、先行研究における結果は、広い枠組みでベゾフ型関数空間やトリーベル・リゾルキン型関数空間を考察しているため、特定の関数空間、例えばベゾフ・モレー空間やトリーベル・リゾルキン・モレー空間に対して結果に帰着させた場合、強い条件を課さないといけない状況であった。

## 2. 研究の目的

ベゾフ型関数空間やトリーベル・リゾルキン型関数空間に対する研究は研究開始当初でも行われていたが、研究開始当初の背景に記載した通り、特定の関数空間、例えばベゾフ・モレー空間やトリーベル・リゾルキン・モレー空間に対しては強い条件を課さなければ先行研究と同様の結果を得ることができないように思われた。そのため、本研究では偏微分方程式への応用の可能性のあるベゾフ・モレー空間やトリーベル・リゾルキン・モレー空間など特定のベゾフ型関数空間やトリーベル・リゾルキン型関数空間にターゲットを絞ることで先行研究よりも弱い条件で差分による特徴づけや種々の作用素の有界性などを考察した。

## 3. 研究の方法

本研究課題の主要な結果は

差分による特徴づけ

荷重付き一般ベゾフ・モレー空間および荷重付き一般トリーベル・リゾルキン・モレー空間の理論の整備

である。

差分による特徴づけについて、ベゾフ・モレー空間やトリーベル・リゾルキン・モレー空間において先行研究があり、その研究手法を応用することで、一般ベゾフ・モレー空間および一般トリーベル・リゾルキン・モレー空間における差分による特徴づけの結果を得ることができ、この結果は先行研究の自然な拡張になっている。

一般ベゾフ・モレー空間と一般トリーベル・リゾルキン・モレー空間のノルムは単位の分解を用いて定義されるが、単位の分解によらないことが重要である(同値なノルムになっていることが重要である)。荷重付き一般ベゾフ・モレー空間と荷重付き一般トリーベル・リゾルキン・モレー空間を適切に定義するためには、これらのノルムが単位の分解によらないことが重要であるが、荷重がマッケンハプトのクラスに属するだけでは不十分であった。ノルムが単位の分解によらないためには、荷重付き一般モレー空間において最大作用素が有界となるための条件を考える必要があることがわかった。この荷重のクラスは先行研究によりすでに得られており、荷重をこのクラスに設定し、従来のフェファーマン・スタインの不等式と同様の証明法を応用することで、荷重付き一般ベゾフ・モレー空間と荷重付き一般トリーベル・リゾルキン・モレー空間を適切に定義することができた。また、荷重がない場合における先行研究と同様の手法により、荷重付きの両空間における原子分解やトレース作用素が有界となるための条件を得た。

## 4. 研究成果

(1) ベゾフ空間やトリーベル・リゾルキン空間は今日ではフーリエ変換を用いた定義が主流であるが、元々は差分を用いた定義された関数空間であり、指数が特定の条件をみたすとき、2つの定義は同値であることが示されている。ベゾフ・モレー空間やトリーベル・リゾルキン・モレー空間においては差分による特徴づけの先行研究がある。その研究手法を応用することで、一般ベゾフ・モレー空間および一般トリーベル・リゾルキン・モレー空間に対する差分による特徴づけを得た。

(2) 一般ベゾフ・モレー空間と一般トリーベル・リゾルキン・モレー空間の有界領域における性質を考察し、特に領域の境界が滑らかな( $C^\infty$ 級)の場合において、両関数空間におけるトレース作用素が有界となる条件を得ることができ、この結果は偏微分方程式への応用が期待できる。

(3) 荷重付き一般ベゾフ・モレー空間と荷重付き一般トリーベル・リゾルキン・モレー空間に対して、両空間が適切に定義されるための荷重のクラスを求めた。荷重付きルベグ空間や荷重付きソボレフ空間などでは荷重はマッケンハプトのクラスに属しているものを考えれば十分であるが、一般ベゾフ・モレー空間および一般トリーベル・リゾルキン・モレー空間に対して荷重を考える場合は、マッケンハプトのクラスだけでは不十分であり、荷重付きモレー空間において最大作用素の有界性を考察する際に必要となる条件を加えることにより、適切に荷重付き一般ベゾフ・モレー空間および荷重付き一般トリーベル・リゾルキン・モレー空間を定義することができることがわかった。さらに、関数空間の構造や性質、作用素の有界性等を調べる際の重要な道具となりうる原子分解の結果を荷重付き一般ベゾフ・モレー空間および荷重付き一般トリーベル・リゾルキン・モレー空間の枠組みにおいて得ることができ、調和解析や実解析で重要なトレース作用素が有界となるための条件を得た。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

|  |                 |
|--|-----------------|
| 1. 著者名<br>M. Izuki, T. Nogayama, T. Noi and Y. Sawano  | 4. 巻<br>198     |
| 2. 論文標題<br>Wavelet characterization of local Muckenhoupt weighted Lebesgue spaces with variable exponent | 5. 発行年<br>2020年 |
| 3. 雑誌名<br>Nonlinear Analysis   | 6. 最初と最後の頁<br>- |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1016/j.na.2020.111930  | 査読の有無<br>有      |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-       |

|  |                         |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名<br>Mitsuo Izuki, Takahiro Noi   | 4. 巻<br>292             |
| 2. 論文標題<br>Generalized Besov-Morrey spaces and generalized Triebel-Lizorkin-Morrey spaces on domains | 5. 発行年<br>2019年         |
| 3. 雑誌名<br>Mathematische Nachrichten  | 6. 最初と最後の頁<br>2212-2251 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>なし  | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-               |

|  |                      |
|--|----------------------|
| 1. 著者名<br>Mitsuo Izuki, Takahiro Noi   | 4. 巻<br>B74          |
| 2. 論文標題<br>Characterization of generalized Besov-Morrey spaces and generalized Triebel-Lizorkin-Morrey spaces by differences | 5. 発行年<br>2019年      |
| 3. 雑誌名<br>RIMS Kokyuroku Bessatsu  | 6. 最初と最後の頁<br>93-125 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>なし  | 査読の有無<br>有           |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-            |

|  |                 |
|--|-----------------|
| 1. 著者名<br>Mitsuo Izuki, Toru Nogayama, Takahiro Noi, Yoshihiro Sawano                                    | 4. 巻<br>-       |
| 2. 論文標題<br>Wavelet Characterization of Local Muckenhoupt Weighted Sobolev Spaces with Variable Exponents | 5. 発行年<br>2022年 |
| 3. 雑誌名<br>Constructive Approximation   | 6. 最初と最後の頁<br>- |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1007/s00365-022-09573-6  | 査読の有無<br>有      |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-       |

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 5件 / うち国際学会 4件）

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Takahiro Noi  |
| 2. 発表標題<br>Weighted generalized Besov-Morrey spaces and weighted generalized Triebel-Lizorkin spaces               |
| 3. 学会等名<br>International Conference on Function spaces and Geometric Analysis and Their Applications (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Takahiro Noi  |
| 2. 発表標題<br>Weighted generalized Besov-Morrey spaces and weighted generalized Triebel-Lizorkin spaces |
| 3. 学会等名<br>12th ISAAC Congress (招待講演) (国際学会)   |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>野井 貴弘  |
| 2. 発表標題<br>Generalized Triebel-Lizorkin-Morrey spaces and its characterization by differences |
| 3. 学会等名<br>調和解析と非線形偏微分方程式 (招待講演)  |
| 4. 発表年<br>2018年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>野井 貴弘  |
| 2. 発表標題<br>Generalized Triebel-Lizorkin-Morrey spaces and its characterization by differences |
| 3. 学会等名<br>Real, Complex and Functional Analysis Seminar 2018                                 |
| 4. 発表年<br>2018年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>野井 貴弘   |
| 2. 発表標題<br>A characterization of generalized Besov Morrey spaces by differences              |
| 3. 学会等名<br>Harmonic Analysis and its Applications in Tokyo at Nihon University (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2017年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>野井 貴弘  |
| 2. 発表標題<br>A characterization of generalized Besov Morrey spaces by differences |
| 3. 学会等名<br>Nonstandard growth phenomena 2017 (国際学会)                             |
| 4. 発表年<br>2017年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>野井 貴弘  |
| 2. 発表標題<br>Characterization of generalized Besov Morrey spaces by ball means of differences |
| 3. 学会等名<br>RIMS共同研究(公開型)「関数空間の深化とその周辺」(招待講演)  |
| 4. 発表年<br>2018年   |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| 氏名<br>(ローマ字氏名)<br>(研究者番号) | 所属研究機関・部局・職<br>(機関番号) | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|