

令和 2 年 7 月 14 日現在

機関番号：34315

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K14210

研究課題名（和文）Orlicz空間上の凸解析学と数理ファイナンスへの応用

研究課題名（英文）Convex Analysis on Orlicz Spaces and Applications to Mathematical Finance

研究代表者

尾張 圭太（OWARI, Keita）

立命館大学・理工学部・助教

研究者番号：10616460

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000 円

研究成果の概要（和文）：双対Orlicz空間における新しい型のKomlos型定理を示した。その特に有用な形は双対Orlicz空間のノルム有界列は順序有界（で概収束する）凸結合列を持つことを主張する。これにより双対Orlicz空間の凸関数・集合に関する複数の深い性質が得られた。特に重要なものとして、双対Orlicz空間の凸集合がMackey位相で閉じていることはその任意の順序区間との共通部分が確率収束位相で閉じていることと同値であることがわかり、特に凸関数が前双対空間による双対表現を持つことの必要十分条件はファイナンスの言葉で言うFatou propertyと同値であることが示された。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の主題である双対Orlicz空間は、数理ファイナンスを始めとする諸分野においてモデルとして用いられており、その上での最適化問題を論じる上ではその凸関数・集合のMackey位相というノルムより弱い位相に関する正則性が重要になる。本研究の成果は、そのような一見難解な正則性を順序有界な確率収束列に関する正則性という測度論を理解している人なら理解可能な程度のわかりやすい条件で記述することを可能にし、この型の空間の扱いを簡単にすることにより、ファイナンスなどの諸問題を論じる土台を広げる役割を果たすものと考えられる。

研究成果の概要（英文）：We obtained a new kind of Komlos type theorem; its particularly useful variant asserts that every norm bounded sequence in a dual Orlicz space has an order bounded (and a. s. convergent) sequence of its forward convex combinations. This in turn yielded several deep properties of convex sets/functions in/on dual Orlicz spaces. Especially, a convex subset of a dual Orlicz space is Mackey closed if and only if its intersection with arbitrary order interval is closed for the topology of convergence in measure, a fortiori a convex function in such a space has a dual representation by its predual if and only if it satisfies the Fatou property in the language of financial mathematics.

研究分野：関数解析，確率論，数理ファイナンス

キーワード：Orlicz空間 Mackey位相 凸関数 リスク測度

## 1 . 研究開始当初の背景

数理ファイナンスの一分野、特に凸リスク測度、効用最大化・ヘッジ問題や数理ファイナンスの基本定理などにおいては確率論と関数解析学のコラボレーションが重要な役割を果たす。ここでは従来、基本空間としては確率空間上の本質的有界な確率変数 ( 可測関数、正確にはそれらの同値類 ) の空間  $L_\infty$  上で議論が展開され、その凸部分集合が Mackey 位相に関して閉じていることが “ 有界列の確率収束 ( or 概収束 ) に関して閉じていること ” と同値であるという Grothendieck による結果、あるいはその凸関数版が重要な役割を果たしてきた。後者の性質は測度論の Fatou の補題との類似から Fatou 性などと呼ばれる。

一方、 $L_\infty$  は抽象論を論じるには便利な一方、例えば正規分布など代表的な確率分布を持つ確率変数を含まない ( 有界でない ) など、モデルの空間として小さすぎることから、近年では数理ファイナンスの諸問題をもう少し大きな空間上で再構築するというのが一つの流れであった。特に適度に柔軟で具体的に扱える関数空間のクラスとして Orlicz 空間が注目され、その上での凸リスク測度や効用最大化問題などの理論が展開されつつあった。そのような文脈で共通して問題になることは凸関数の Mackey 位相 ( ノルム位相より弱い ) に関する下半連続性、連続性であり、それらを  $L_\infty$  の場合のように有界確率収束列のようなわかりやすいもので記述することは同分野における大きな関心事であった。

## 2 . 研究の目的

本研究の大きな目的は、前述の背景から、Orlicz 空間上の凸関数・集合の基本的な正則性を有界確率収束列に関する正則性として記述し、Orlicz 空間を  $L_\infty$  に変わってファイナンスの問題を論じる汎用的なクラスにすることにある。ここで Orlicz 空間とは対称凸関数で原点で 0 なもの ( Young 関数という ) によって定義される確率変数 ( 可測関数 ) の Banach 空間で、その Young 関数が  $x^p$  のときは  $L_p$  空間である。また Young 関数が  $x^2$  という成長条件を満たすとき、その双対空間もまた共役 Young 関数で定義される Orlicz 空間であり、また元の確率空間がアトムを持たなければ逆も成り立つ。このことから、ここでは  $x^2$  型 Young 関数の共役 Young 関数で定義される Orlicz 空間を双対 Orlicz 空間と呼ぶ。本研究の対称は双対 Orlicz 空間である。また Orlicz 空間は Banach 空間であると同時に順序構造を持った lattice でもあり、絶対値等の概念がある。したがってノルムに関する有界性の他に “ 一つの要素によって絶対値で抑えられている ” という意味での有界性 ( 順序有界性という ) もあり、一般に後者のほうがノルム有界性よりも強い。本研究の主眼は、順序有界な確率収束列を用いて凸集合の基本的な正則性 ( 主に Mackey 位相に関する ) を記述することにある。

## 3 . 研究の方法

- (1) 本研究の主要な部分は Freddy Delbaen 氏との共同研究で行った。
- (2) 研究成果の公表と議論・意見交換のため学会出張や短期の研究滞在を数回行った。

## 4 . 研究成果

まず双対 Orlicz 空間における新しい型の Komlós 型定理を示した。もともとの Komlós の定理は、 $L_1$  ( 可積分関数の空間 ) 上のノルム有界列はある部分列で、そのすべての部分列の算術平均が概収束するようなものを持つというものであり、その系である  $L_1$  の ( ノルム ) 有界列は概収束する凸結合の列 ( 正確には書く  $n$  について  $n$  から先の番号の項で構成される凸結合 ; forward convex combinations などと呼ぶ ) を持つという結果は非反射的 Banach 空間である  $L_1$  におけるある種のコンパクト性の代用物として応用上良く用いられる。本研究で示した Komlós 型定理の基本形は、

- (1) 双対 Orlicz 空間のノルム有界列で確率収束するものは、ある部分列で、そのすべての ( 更なる ) 部分列の算術平均が順序有界で概収束するようなものを持つ、

というものである。ここでのキーポイントは、ノルム有界列から順序有界な凸結合列が得られるということである ( Orlicz 空間のノルム有界列は  $L_1$  でも有界なので概収束の部分は元々の Komlós の定理から従う )。これを基本形として、いくつかの変形版も得られた。例えば、

- (2) 双対 Orlicz 空間のノルム有界列は、その部分列ですべてのその部分列が Mackey 位相で収

束するようなものを持つ（ここでは確率収束の仮定は不要）。

(3) 双対 Orlicz 空間のノルム有界列は、順序収束するその凸結合 (forward convex combinations) の列を持つ（ここでも確率収束は不要）。

更に、これらの“順序有界な凸結合/算術平均”に関する性質は（確率空間がアトムを持たない（少なくとも一つ正規確率変数を持つ）というテクニカルな仮定のもとで）双対 Orlicz 空間を特徴づける、つまり

(4) Orlicz 空間が双対 Orlicz 空間である（つまり共役 Young 関数が  $\varphi_2$  条件を満たす）ことの必要十分条件は上記(1)-(3)の同値な性質を満たすことである。

次に元々のモチベーションであった双対 Orlicz 空間の凸集合・関数について、Biagini and Frittelli (2009)の予想について、まず次のような Krein-Šmulian 型の定理を得た：

(5) 双対 Orlicz 空間の凸部分集合が弱\*閉（Mackey 閉）である必要十分条件はその集合と任意の順序区間との共通部分は確率収束位相 ( $L_0$  の位相) で閉じていることである。

凸関数の文脈ではこれは、双対 Orlicz 空間上の (proper な) 凸関数が Mackey 位相で（弱\*位相で）下半連続であることは、任意の順序区間上で確率収束位相にか半連続であること、つまり“順序有界な確率収束列に関して下半連続”であること (Fatou 性) と同値であることを意味し、これにより数理ファイナンスで言う双対表現が一見より弱い条件で得られることとなる。これは下半連続性に関する結果であるが、連続性についても、

(6) 双対 Orlicz 空間上の有限値凸関数が Mackey 位相で連続である必要十分条件は、“順序有界な確率収束列に関して連続” (Lebesgue 性) なことである。

特に、確率収束位相は距離付可能なので、点列 Mackey 連続な有限値凸関数は Mackey 連続であること、また点列 Mackey 閉な凸部分集合は弱\*閉であることなど、双対 Orlicz 空間の Mackey 位相に関する新しい知見が得られた。また数理ファイナンスによく現れる単調な凸 (or 凹関数) についてはこれらの正則性は単調な確率収束で特徴づけられることなども得た。

以上の結果は Freddy Delbaen 氏との共著論文として Positivity に出版され (Delbaen and Owari 2019)、本報告書執筆時点で 17 件の引用がある (google scholar)。

また期間内に出版するには至らなかったが以下のような考察を行い部分的な結果を得た。

まず上記(4)-(6)に関連して、双対 Orlicz 空間の Mackey 位相は有界集合上で確率収束位相と一致するか。あるいは少なくとも距離付可能かという問題に取り組んだ。後者の性質は当該双対 Orlicz 空間の前双対 (predual) である Orlicz 空間が SWCG (strongly weakly compactly generated) という性質を持つことと同値であり、それはラフに言ってすべての弱コンパクト部分集合が一つの弱コンパクト集合で“ほぼ”吸収されるということの意味する。また前者の性質は  $L_\infty$  では成り立つことが知られ、数理ファイナンスの基本的なツールとなっている。これまでに、(a) 前者の性質は Orlicz 空間が SWCG で、その“一つの弱コンパクト集合”として  $L_\infty$  の単位球が取れること (以下 SWCG by  $L_\infty$ ) と同値、(b) Orlicz 空間が SWCG by  $L_\infty$  なら  $\varphi_2$  である、(c) Orlicz 空間を定義する Young 関数とその共役が両方とも  $\varphi_2$  ならその Orlicz 空間は (反射的なので) SWCG だが、“by  $L_\infty$ ”ではないことがわかった。したがって残るのは Orlicz 空間が  $\varphi_2$  でその共役 Young 関数は  $\varphi_2$  ではないならば、その Orlicz 空間は SWCG by  $L_\infty$  か？という問題である。これについて、まず Alexopoulos, Bárcenas and Echandia (2004) の互いに交わらない集合の指示関数の定数倍の形の弱収束列に関するある結果を用いて肯定的に解決することを試み、一見成功したかに思えたが、同論文の引用部分にエラーが見つかり、振り出しに戻ってしまい、次に Astashkin, Kalton and Sukochev (2008) の結果から、少し強い  $\varphi_3$  という条件が SWCG by  $L_\infty$  と同値という予想を立てて検討したが、こちらも当該論文に誤りがあり、現在も問題の最終解決には至っていない。これについては今後も検討していきたい。

上記(1)の Komlós 型定理は (応用上は十分だが) 有界列が確率収束することを事前に仮定していて、この部分が不完全に見える。我々はこの仮定は不要という予想を立てて検討した。これについては部分的な結果として、有界列が exchangeable (有限個の項を並べ替えても列全体の結合分布は変わらない) である場合には、確率収束の事前の仮定なしに同じ結論が得られることがわかった。これはやはり双対 Orlicz 空間に固有の martingale 不等式をうまく用いることで

示される。これを足がかりとして、一般の有界列を Kadec-Pelczynski の定理のような部分列分割の手法を用いて前述のケースに帰着することを試みたが、現在のところ最終解決には至っていない。これも今後継続して検討したい。

#### 引用文献

Alexopoulos, Bárcenas and Echandía (2004): Some Banach space characterizations of the  $\Delta_2$  condition. Quaest. Math. 27, 29-38.

Astashkin, Kalton and Sukochev (2008): Cesaro mean convergence of martingale differences in rearrangement invariant spaces. Positivity 12, 387-406.

Biagini and Frittelli (2009): On the extension of the Namioka-Klee theorem and on the Fatou property for risk measures. In: Optimality and risk - modern trends in mathematical finance, Springer. pp. 1-28.

Delbaen and Owari (2019): Convex functions on dual Orlicz spaces. Positivity 23 (5), pp. 1051-1064.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 1件／うち国際共著 2件／うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Delbaen Freddy, Owari Keita	4. 巻 23
2. 論文標題 Convex functions on dual Orlicz spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Positivity	6. 最初と最後の頁 1051 ~ 1064
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11117-019-00651-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Freddy Delbaen, Keita Owari	4. 巻 -
2. 論文標題 Convex Functions on Dual Orlicz spaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 ArXiv	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 2件／うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Keita Owari
2. 発表標題 A Komlos Type Theorem in Dual Orlicz Spaces and Convex Duality in Finance
3. 学会等名 The 10th CEQURA Conference on Advances in Financial and Insurance Risk Management（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Keita Owari
2. 発表標題 A Komlos-type Theorem in Dual Orlicz spaces and Convex Duality in Finance
3. 学会等名 Probability, Stochastic Modelling and Financial Mathematics seminar（招待講演）
4. 発表年 2019年

1 . 発表者名 Keita Owari
2 . 発表標題 A Komlos-type Theorem and the Mackey Topology on dual Orlicz spaces
3 . 学会等名 London Mathematical Finance Seminar Series (招待講演)
4 . 発表年 2019年

1 . 発表者名 Freddy Delbaen, Keita Owari
2 . 発表標題 Convex Functions on Dual Orlicz Spaces
3 . 学会等名 10th world congress of the Bachelier finance society (国際学会)
4 . 発表年 2018年

1 . 発表者名 Keita Owari (with Freddy Delbaen)
2 . 発表標題 On Convex Functions on the Duals of $\Delta_2$ -Orlicz Spaces
3 . 学会等名 13th Annual Conference of the Asia-Pacific Association of Derivatives, 2017/07/10 (国際学会)
4 . 発表年 2017年

1 . 発表者名 Keita Owari (with Freddy Delbaen)
2 . 発表標題 A Komlos-Type Theorem in Dual Orlicz Spaces
3 . 学会等名 Risk & Stochastics and Financial Mathematics Joint Seminar, LSE, 2017/09/20
4 . 発表年 2017年

1 . 発表者名 Keita Owari (with Freddy Delbaen)
2 . 発表標題 A Komlos-Type Theorem in Dual Orlicz Spaces
3 . 学会等名 Dirichlet Forms and Stochastic Analysis, 2017/11/04 ( 国際学会 )
4 . 発表年 2017年

1 . 発表者名 Keita Owari (with Freddy Delbaen)
2 . 発表標題 On a Komlos-Type Result in a Dual Orlicz Spaces
3 . 学会等名 12th Bachelier Colloquium, 2018/01/18 ( 国際学会 )
4 . 発表年 2018年

〔 図書 〕 計0件

〔 産業財産権 〕

〔 その他 〕

-

6 . 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----