

令和 5 年 6 月 15 日現在

機関番号：31302

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K14212

研究課題名(和文) 多項式の力学系を基点とする超越整関数および多項式半群の複素力学系の研究

研究課題名(英文) Research on dynamics of transcendental entire functions and polynomial semigroups based on dynamics of polynomials

研究代表者

片方 江 (Katagata, Koh)

東北学院大学・教養学部・准教授

研究者番号：10529598

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：研究成果は以下の通りである。(1)任意に与えた n 個の2次多項式の力学系を局所的に含む、すなわち n 個の2次擬多項式写像を含む超越整関数で位数が0であるものを構成した。(2)任意に与えた無限個の2次多項式を局所的に含む、すなわち無限個の2次擬多項式写像を含む超越整関数で位数が0であるものを構成した。(3)任意に与えた無限個の次数が2以上の多項式の力学系を局所的に含む、すなわち無限個の擬多項式写像を含む超越整関数でいくらかでも遅い増大度を持つものを構成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では多項式の力学系を出発点として超越整関数の力学系特有の現象、特にファトウ集合やジュリア集合などの不変集合の位相的性質の解明と、擬多項式写像をキーワードにした力学系的性質の一般論の展開を目指した。本研究で得られた超越整関数はその構成方法から有限個または無限個の多項式の力学系を部分力学系として持っており、そのジュリア集合は多項式のジュリア集合のコピーを部分集合に持っている。上記(3)の超越整関数については無限個の多項式を扱っていることから、これまでになく新たな具体例が構成できたと言える。

研究成果の概要(英文)：The results of this research are as follows. (1) We constructed a transcendental entire function which has order zero containing dynamics of n quadratic polynomials locally, that is, containing n quadratic-like maps. (2) We constructed a transcendental entire function which has order zero containing dynamics of infinitely many quadratic polynomials locally, that is, containing infinitely many quadratic-like maps. (3) We constructed a transcendental entire function of arbitrarily slow growth containing dynamics of infinitely many polynomials of degree at least two locally, that is, containing infinitely many polynomial-like maps.

研究分野：複素力学系

キーワード：複素力学系 超越整関数 擬多項式写像 ジュリア集合

1. 研究開始当初の背景

《超越整関数の力学系について》多項式と超越整関数はともに整関数であるが、多項式において無限遠点が極であるのに対して、超越整関数においては真性特異点となっている。また、力学系の挙動に大きな影響を与える特異値に違いがあり、多項式の特異値は臨界値だけであるのに対して、超越整関数の特異値は一般に臨界値と漸近値の二種類が存在する。そのため、多項式と超越整関数の力学系には大きな差異がある。一方で、超越整関数は多項式列の広義一様収束極限として表現されるため、多項式の力学系の性質が何らかの形で遺伝しているのではないかと考えることは自然である。実際、多項式の力学系の極限として超越整関数の力学系を記述する方法が先行研究により示されている。また、パラメータ付きの超越整関数を考えることで、超越整関数の力学系に付随する不変集合などの変化をとらえることができる。この手法を用いることで、研究代表者は超越整関数のジューゲル円板の境界に関する結果を得た。これらの方法とは別に、研究代表者は超越整関数に潜む擬多項式写像(局所的に多項式のように振る舞う写像)をとらえることでも、超越整関数の力学系を理解できるのではないかと考えていた。例えば、研究代表者は n 個の 2 次擬多項式写像を含む超越整関数の構成に成功しており、擬多項式写像に着目する方法も超越整関数の力学系の研究を前進させる一つの手段と考えていた。

《多項式半群の力学系について》多項式半群とは、関数の合成を積とする多項式によって生成される半群である。多項式半群の複素平面への作用は多項式の反復合成の作用の拡張と考えられるため、多項式の力学系の結果を多項式半群へ応用したり、逆に多項式半群の結果を多項式の力学系へフィードバックしたりすることが期待できる。研究代表者は、以前より「高い次数の多項式の力学系を、低い次数の多項式からなる多項式半群の力学系として表現できるのではないかと考えており、ある条件を満たす 4 次多項式のジュリア集合が、2 つの 2 次多項式からなる多項式半群のジュリア集合と同相になることを証明した。この例から、多項式の力学系と多項式半群の力学系には密接な関係があることが伺える。既存の理論をうまく活用しつつ、多項式の力学系と多項式半群の力学系の相互関係に着目した研究代表者の発想を融合させることで、多項式半群の研究の新たな展開が可能であると感じていた。

2. 研究の目的

(A) 超越整関数の力学系については以下の 3 項目を明らかにする：

(A1) 急速発散点集合(fast escaping set)・蜘蛛の巣(spider's web)・髪の毛(hair)などの超越整関数の力学系特有の集合を解析し、ファトゥ集合やジュリア集合をはじめとする不変集合の位相的性質を明らかにする。(A2) 一般に、ジューゲル円板(回転領域)の境界は特異値の軌道の閉包に含まれていることから、ジューゲル円板の境界における特異値の有無や位相的性質を明らかにする。(A3) 多項式列の広義一様収束極限として超越整関数を捉えたり、超越整関数に潜む擬多項式写像に着目したりして、超越整関数特有の力学系的性質や多項式の力学系との類似点を明らかにする。

(B) 多項式半群の力学系については以下の 2 項目を明らかにする：

(B1) 高次の多項式の力学系を、低次の多項式からなる多項式半群の力学系で記述する方法の一般論を構築し、多項式の力学系と多項式半群の力学系の相互関係を明らかにする。(B2) 有限生成の多項式半群に焦点を絞り、多項式半群特有のジュリア集合の位相的性質や、ハウスドルフ次元などのフラクタル幾何的な性質を明らかにする。

3. 研究の方法

(A) 超越整関数の力学系については、超越整関数を多項式列の広義一様収束極限として捉えるなどの従来の方法に加えて、有限個または無限個の擬多項式写像を内側に含んでいる超越整関数を構成して、超越整関数の力学系的性質や不変集合などの位相的性質を調べる。

(B) 多項式半群の力学系については、まず高次の多項式から低次の多項式によって生成される多項式半群を構成して、多項式の力学系との関連性を考察する。その後、ジュリア集合などの各種性質を考察するために、一般論の展開を視野に入れた有限生成の多項式半群の具体例を構成する。

4. 研究成果

研究成果は以下の通りである：

(1) 任意に与えた n 個の 2 次多項式の力学系を局所的に含む、すなわち n 個の 2 次擬多項式写

像を含む超越整関数で位数が 0 であるものを構成した。この結果、任意に与えた有限個の 2 次多項式のジュリア集合のコピーを持つ超越整関数の存在を確認することができた。構成方法から、この超越整関数は遊走領域を持つことが確認できた。また、位数が 0 であることから関数の具体的な形が分かった。この結果は 2017 年 5 月に専門誌(Nonlinearity)に掲載となった。

(2)任意に与えた無限個の 2 次多項式を局所的に含む、すなわち無限個の 2 次擬多項式写像を含む超越整関数で位数が 0 であるものを構成した。この結果、任意に与えた無限個の 2 次多項式のジュリア集合のコピーを持つ超越整関数の存在を確認することができた。構成方法から、この超越整関数は遊走領域を持つことが確認できた。また、位数が 0 であることから関数の具体的な形が分かった。この結果は 2019 年 9 月に専門誌(Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A)に掲載となった。

(3)任意に与えた無限個の次数が 2 以上の多項式の力学系を局所的に含む、すなわち無限個の擬多項式写像を含む超越整関数でいくらでも遅い増大度を持つものを構成した。(2)の具体例とは異なる構成方法を用いたが、多項式の次数を 2 以上に拡張することができた。また、増大度を制御することができた。構成方法から、この超越整関数は遊走領域およびベーカー領域を持たないことが分かった。この結果は 2022 年 5 月に専門誌(Journal of Difference Equations and Applications)に掲載となった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Katagata Koh	4. 巻 28
2. 論文標題 Entire functions of slow growth whose Julia set contains any infinite collection of quasiconformal copies of polynomial Julia sets	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Difference Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 605 ~ 637
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/10236198.2022.2070008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Katagata Koh	4. 巻 39
2. 論文標題 Transcendental entire functions whose Julia sets contain any infinite collection of quasiconformal copies of quadratic Julia sets	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A	6. 最初と最後の頁 5319--5337
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/dcds.2019217	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Koh KATAGATA	4. 巻 30
2. 論文標題 Entire functions whose Julia sets include any finitely many copies of quadratic Julia sets	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 2360-2380
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 片方 江
2. 発表標題 An example of functions of slow growth whose fast escaping set has Hausdorff dimension two
3. 学会等名 複素力学系と関連分野
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 片方 江
2. 発表標題 無限個の擬多項式写像を含む超越整関数の構成
3. 学会等名 「等角写像・値分布論」合同研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 片方 江
2. 発表標題 Transcendental entire functions whose Julia sets contain any infinite collection of quasiconformal copies of polynomial Julia sets
3. 学会等名 複素力学系理論の総合的研究
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 片方 江
2. 発表標題 無限個の擬多項式写像を含む超越整関数の構成
3. 学会等名 Real, Complex and Functional Analysis Seminar 2020
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 片方 江
2. 発表標題 Transcendental entire functions whose Julia sets contain any infinite collection of quasiconformal copies of polynomial Julia sets
3. 学会等名 2020年度「リーマン面・不連続群論」研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 片方 江
2. 発表標題 Transcendental entire functions whose Julia sets contain any infinite collection of quasiconformal copies of quadratic Julia sets
3. 学会等名 日本数学会2019年秋季総合分
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 片方 江
2. 発表標題 無限個の2次擬多項式写像を含む超越整関数の構成
3. 学会等名 Real, Complex and Functional Analysis Seminar 2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 片方 江
2. 発表標題 Transcendental entire functions whose Julia sets contain any infinite collection of quasiconformal copies of quadratic Julia sets
3. 学会等名 複素力学系の分岐と安定性の研究
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 片方 江
2. 発表標題 無限個の2次擬多項式写像を含む超越整関数の構成
3. 学会等名 Geometry of Riemann surfaces and related topics
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 片方 江
2. 発表標題 Entire functions whose Julia sets include any finitely many copies of quadratic Julia sets
3. 学会等名 日本数学会2017年秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 片方 江
2. 発表標題 Transcendental entire functions whose Julia sets include any infinitely many copies of quadratic Julia sets
3. 学会等名 平成29年度等角写像論・値分布論研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 片方 江
2. 発表標題 擬等角手術によって構成された超越整関数の位数
3. 学会等名 2017年度日本数学会東北支部会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------