

令和 6 年 5 月 31 日現在

機関番号：10103

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2023

課題番号：17K14214

研究課題名(和文) Trudinger-Moser型臨界非線形楕円型方程式の符号変化の漸近挙動

研究課題名(英文) Asymptotic behaviors of nodal radial solutions to semilinear elliptic equations with Trudinger-Moser critical growth

研究代表者

内免 大輔(Naimen, Daisuke)

室蘭工業大学・大学院工学研究科・准教授

研究者番号：20783278

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題を通して、まず、当初の目標であった円盤領域における当該方程式の最小エネルギー球対称符号変化の漸近挙動の解析を完成させた。特に、解の正の部分は最大点の周りに集中し、一方で負の部分は爆発せず、ある正值解に強収束することを示した。これは当該方程式の持つ非コンパクト性の象徴である集中挙動とそれとは対照的なコンパクト挙動が共存する符号変化爆発解ならではの挙動として興味深い。さらに、発展課題として、円盤領域における一般の球対称符号変化の爆発挙動の分類に取り組み、これにも成功した。ここでは複数の集中部分と複数のコンパクト部分が共存する多様な挙動を精密に分類することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究課題の遂行以前、当該研究分野では当該方程式の「正值」解の爆発挙動が専ら研究されていた。これに対し、本課題は本研究分野において先駆けて「符号変化」爆発解の挙動を本格的に研究したものである。本研究の結果、非コンパクト性を有する臨界方程式特有の集中現象と、それに対照的なコンパクト現象が混在する符号変化爆発解ならではの挙動を捉えることができた。この成果が当該研究分野に与えるインパクトは大きく、今後の符号変化爆発解の研究の発展の起点と成るものといえる。

研究成果の概要(英文)：We accomplished the analysis of asymptotic behaviors of the least energy nodal radial solutions to semilinear elliptic equations with Trudinger-Moser critical growth. We found that the positive part concentrates at the maximum point while the negative part strongly converges to a positive solution. Interestingly, this result implies that a sign-changing solution consists of the noncompact and compact parts. This observation could not be found in the behaviors of positive solutions in the previous works. We also succeeded in the complete classification of the asymptotic behaviors of general nodal radial solutions. In particular, we observed that, interestingly, the solutions may admit multiple concentration parts with multiple compact parts.

研究分野：非線形解析

キーワード：解の集中現象

1. 研究開始当初の背景

(1) 先行研究1：正值爆発解の研究

本研究開始当初までは当該方程式研究においては専ら正值爆発解の集中現象についての研究が盛んに行われていた([3]等)。これらにより、正值爆発解は爆発点の近くに集中すること(「解の集中現象」)、爆発点のまわりで解を適切にスケールリングすることで集中部分の漸近的概形やエネルギーを極限方程式「Liouville 方程式」を使って特徴づけることができること、さらに爆発解は同等のエネルギーを持つ高々有限個の集中部分に分解できること(「エネルギーの量子化現象」)などが明らかにされていた。

(2) 先行研究2：球対称符号変化解の存在

(1)で述べた正值爆発解の解析の発展とは対照的に、符号変化解の漸近挙動についての研究は技術的な困難などによりほとんど行われておらず、符号変化爆発解がどのような集中現象を起こすのかについて詳しくは知られていなかった。ただし、符号変化解の存在については一定の理解が進んでいた。特に、円盤領域上の方程式が強い摂動項を持つ場合に球対称符号変化解を持つことが証明されていた([1])。ここで興味深いのは、正值解とは違い、摂動項の強さを表すパラメータのある値を境に球対称符号変化解の存在と非存在が明確に分かれる点である([2])。このことから、各パラメータ毎の符号変化解を考え、そのパラメータを解の存在と非存在の境目に限りなく近づけたとき、符号変化解の列は爆発挙動を示すことが期待される。この解の列の漸近挙動を調べることは興味深いと思われる。

2. 研究の目的

上述の背景を受け、本研究では2次元臨界指数型非線形項を持つ楕円型方程式の符号変化解の漸近挙動について明らかにすることを目的とする。特に正值解に対する先行研究では観察されなかったような符号変化解ならではの集中挙動を発見することを目指す。このために、本研究では[1]で変分法を用いて構成された最小エネルギー符号変化解の列を考える。さらに、当該符号変化解を正の部分と負の部分に分け、それぞれの挙動を以下の点に注目して詳しく解析する。

(1) 正の部分の爆発解析

適切なパラメータ極限において正の部分が最大点のまわりに集中すること、および集中点のまわりの解の概形およびエネルギーが Liouville 方程式の正則解によって特徴づけられることを示す。

(2) 負の部分の挙動

負の部分が爆発するか否かを調べる。その結果によって以下のように解析を進める。

①負の部分が爆発する場合

負の部分が極大点のまわりに集中すること、および集中の概形及びエネルギーが Liouville 方程式の解を用いて特徴づけられることを示す。ここでは、集中現象を特徴づける Liouville 方程式の解が特異解になる可能性がある。もしこのことが示されれば、正值解の挙動とは異なる符号変化爆発解ならではの挙動が観察されたことになり興味深い。

②負の部分が爆発しない場合

負の部分が円盤上の方程式の解に強収束することを示す。ここで、負の部分は方程式の自明な解または非自明な解に収束する可能性がある。これまでの正值解の爆発挙動の研究では、集中部分の外では解が方程式の自明解に収束する現象のみが観察されていたことに注意すると、当該符号変化解の負の部分が非自明な解へ収束することが示されれば、これもまた符号変化解ならではの挙動として興味深い。

3. 研究の方法

(1) エネルギーの精密評価

まず、最小エネルギー符号変化解のエネルギーの精密評価を行う。特に、諸先行研究でもしばしば使用されている試験関数「Moser 列」を用いたエネルギー評価を行う。この評価は符号変化解の負の部分が爆発するか否かを判定する際に役立つと期待される。エネルギー評価が完了次第、符号変化解の微視的な挙動を詳しく調べるために、解を正の部分と負の部分に分けて以下の通り解析を行う。

(2) 正の部分の解析

まず正の部分の解析を行う。正の部分は適当なスケールリングによって固定された円盤上の方程式の正值解と見做すことができるため、上述の先行研究[3]による正值爆発解に対するスケールリング法を適用する。特に、最大点のまわりで適切なスケールリングをすることにより、集中部分のまわりの漸近的形状およびエネルギーが極限方程式によって特徴づけられることを示す。

(3) 負の部分の解析

続いて、負の部分の解析を行う。まず、(1)で得られたエネルギー評価を利用して負の部分が爆発するかどうかを調べる。爆発する場合は、正の部分の解析と同様に負の部分の最大点のまわりで解を適切にスケールリングすることにより、集中部分の漸近的概形およびエネルギーが極限方程式の解によって特徴づけられることを示す。負の部分が爆発しない場合は、円盤上の解に強収束することを示す。

4. 研究成果

(1) 最小エネルギー符号変化解の漸近挙動

本研究の結果、まず、当初の目標であった円盤領域における最小エネルギー球対称符号変化解の漸近挙動の解析を完成させることができた。特に、解の正の部分が爆発し、最大点の周りに集中すること、および集中の漸近的概形やエネルギーが Liouville 方程式の正則解によって特徴づけられることを示した。一方で負の部分は爆発せず、ある正值解に強収束することを示すことに成功した。これは臨界型方程式の持つ非コンパクト性の象徴である集中現象とそれとは対照的なコンパクト性が共存する符号変化爆発解ならではの挙動として興味深い。本結果はローマ大学の M. Grossi 氏との共著論文として学術論文誌より出版された ([4])。

(2) 一般の球対称符号変化解の爆発挙動の分類

さらに(1)の成果の発展課題として、最小エネルギー解とは限らない一般の球対称符号変化解の漸近挙動の解析を行った。これにより、非線形項がある種の強い摂動項を持つ場合において、球対称符号変化解の爆発挙動を完全に分類することができた。ここでは複数の集中部分と複数のコンパクト部分が共存する多様な符号変化爆発挙動を精密に分類することができた。当該結果も学術論文として専門誌から出版された ([5])。

(3) 一般の有界領域における符号変化爆発解の構成

さらに(1)のもう一つの発展的課題として、一般の有界領域における符号変化爆発解の構成に挑戦した。その準備として一般の有界領域における正值解の非退化性の証明に取り組んだ。これについては、当該方程式の持つ指数型の強い非線形性に起因する種々の困難のためにこれまでのところ未解決であり、現在も研究進行中である。

引用文献

- [1] Adimurthi and S.L. Yadava, Multiplicity results for semilinear elliptic equations in a bounded domain of \mathbb{R}^2 involving critical exponents, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 17 (1990), 481-504.
- [2] Adimurthi and S. L. Yadava, Nonexistence of nodal solutions of elliptic equations with critical growth in \mathbb{R}^2 , Trans. Amer. Math. Soc. 332 (1992), 449-458.
- [3] Adimurthi and O. Druet, Blow-up analysis in dimension 2 and a sharp form of Trudinger-Moser inequality. Comm. Partial Differential Equations 29(2004), 295-322.

- [4] M. Grossi and D. Naimen, Blow-up analysis for nodal radial solutions in Moser-Trudinger critical equations in \mathbb{R}^2 , *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (5)20(2020), 797-825.
- [5] D. Naimen, Concentration profile, energy, and weak limits of radial solutions to semilinear elliptic equations with Trudinger-Moser critical nonlinearities, *Calc. Var. Partial Differential Equations*60(2021), Paper No. 66, 54 pp.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Daisuke Naimen	4. 巻 60
2. 論文標題 Concentration profile, energy, and weak limits of radial solutions to semilinear elliptic equations with Trudinger-Moser critical nonlinearities.	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00526-021-01951-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Massimo Grossi, Gabriele Mancini, Daisuke Naimen, Angela Pistoia	4. 巻 380
2. 論文標題 Bubbling nodal solutions for a large perturbation of the Moser-Trudinger equation on planar domains	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 643-686
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-020-01975-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Daisuke Naimen, Futoshi Takahashi	4. 巻 47
2. 論文標題 A Note on Radial Solutions to the Critical Lane-Emden Equation with a Variable Coefficient	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's	6. 最初と最後の頁 273-290
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-73363-6_13	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Daisuke Naimen, Massimo Grossi	4. 巻 20
2. 論文標題 Blow-up analysis for nodal radial solutions in Moser-Trudinger critical equations in R^2	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie V	6. 最初と最後の頁 797-825
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2422/2036-2145.201707_006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Daisuke Naimen, Masataka Shibata	4. 巻 186
2. 論文標題 Two positive solutions for the Kirchhoff type elliptic problem with critical nonlinearity in high dimension	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 187-208
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.na.2019.02.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 D.Naimen and C.Tarsi	4. 巻 22
2. 論文標題 Multiple solutions of a Kirchhoff type elliptic problem with the Trudinger-Moser growth	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Advances in Differential Equations	6. 最初と最後の頁 983 ~ 1012
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計22件 (うち招待講演 21件 / うち国際学会 15件)

1. 発表者名 内免大輔
2. 発表標題 指数型臨界非線形項を持つ楕円型方程式の球対称解の集中挙動について
3. 学会等名 非線形偏微分方程式と走化性 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 内免大輔
2. 発表標題 Trudinger-Moser 型臨界非線形楕円型方程式の球対称解の集中挙動について
3. 学会等名 オンライン放物型偏微分方程式ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 内免大輔
2. 発表標題 Trudinger-Moser臨界非線形楕円型方程式の球対称解の集中挙動について
3. 学会等名 RIMS共同研究(グループ型)「非線形問題への常微分方程式の手法によるアプローチ」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Daisuke Naimen
2. 発表標題 Blow-up analysis for nodal radial solutions in Trudinger-Moser critical equations in R^2
3. 学会等名 6th GEOMETRIC PROPERTIES FOR PARABOLIC AND ELLIPTIC PDE's (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Daisuke Naimen
2. 発表標題 Blow-up analysis for nodal radial solutions in Trudinger-Moser critical equations in R^2
3. 学会等名 第44回偏微分方程式論札幌シンポジウム(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 内免大輔
2. 発表標題 2次元臨界非線形楕円型方程式の球対称符号変化解の集中コンパクト現象について
3. 学会等名 第241回広島数理解析セミナー(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Daisuke Naimen
2. 発表標題 Blow-up analysis for nodal radial solutions in Moser-Trudinger critical equations in R^2
3. 学会等名 AMS Spring Southeastern Sectional Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Daisuke Naimen
2. 発表標題 Blow-up analysis for nodal radial solutions in Moser-Trudinger critical equations in R^2
3. 学会等名 The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 内免大輔
2. 発表標題 Kirchhoff 型非線形楕円型方程式の4次元臨界問題について
3. 学会等名 芝浦工業大学における微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 内免大輔
2. 発表標題 Blow-up analysis for nodal radial solutions in Moser-Trudinger critical equations in R^2
3. 学会等名 さいたま数理解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Daisuke Naimen
2. 発表標題 Blow-up analysis for nodal radial solutions in Moser-Trudinger critical equations in R^2
3. 学会等名 International Workshop on Nonlinear PDEs 2018 in Okayama (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Daisuke Naimen
2. 発表標題 Existence and multiplicity of positive solutions of a critical Kirchhoff type elliptic problem in dimension four
3. 学会等名 AMS Spring Central and Western Joint Sectional Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Daisuke Naimen
2. 発表標題 Blow-up analysis for nodal radial solutions in Moser-Trudinger critical equations in R^2
3. 学会等名 Recent Topics on Nonlinear Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Daisuke Naimen
2. 発表標題 Blow-up analysis for nodal radial solutions in Moser-Trudinger critical equations in R^2
3. 学会等名 69th Kyoto Ekimae Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Daisuke Naimen
2. 発表標題 Blow-up analysis for nodal radial solutions in Moser-Trudinger critical equations in R^2
3. 学会等名 Young PDE's @ Roma (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 内免大輔
2. 発表標題 Blow-up analysis for nodal radial solutions in Moser-Trudinger critical equations in R^2
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Daisuke Naimen
2. 発表標題 Blow-up analysis for nodal radial solutions in Moser-Trudinger critical equations in R^2
3. 学会等名 AMS Spring Southeastern Sectional Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Daisuke Naimen
2. 発表標題 Blow-up analysis for nodal radial solutions in Moser-Trudinger critical equations in R^2
3. 学会等名 The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Daisuke Naimen
2. 発表標題 Concentration phenomena on radial solutions to semilinear elliptic equations with the Trudinger-Moser growth
3. 学会等名 The 13th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Special Session 1 0 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Daisuke Naimen
2. 発表標題 Concentration phenomena on radial solutions to semilinear elliptic equations with the Trudinger-Moser growth
3. 学会等名 The 13th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Special Session 28 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Daisuke Naimen
2. 発表標題 Concentration analysis of semilinear elliptic equations with exponential growth in a disc
3. 学会等名 Non-compactness phenomena on critical problems and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Daisuke Naimen
2. 発表標題 Concentration estimates for positive solutions of semilinear elliptic equations with exponential growth in a disc
3. 学会等名 One-day workshop in Toyonaka (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Functional Inequalities and Asymptotic Analysis of Nonlinear Elliptic Equations	開催年 2023年～2023年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
イタリア	ローマ大学		