

令和 5 年 5 月 28 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K14218

研究課題名（和文）シュレディンガー方程式に対するスケール臨界な大域挙動の定量的解析

研究課題名（英文）Quantitative analysis of global behaviors for scaling-critical Schrödinger equations

研究代表者

水谷 治哉（Mizutani, Haruya）

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：10614985

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：シュレディンガー方程式の大域解析においては放物型尺度変換によって不変あるいは臨界な関数空間における解析が重要であることが知られている。本研究課題では尺度臨界空間に属するポテンシャルをもつシュレディンガー方程式の定常問題に対して一様レゾルベント評価を証明した。さらに、その応用として、非線形散乱理論において重要な役割を果たすストリッカーツ評価を証明し、これを線形ポテンシャルを伴う非線形シュレディンガー方程式の散乱理論に応用した。また、非対称なポテンシャルをもつ非自己共役シュレディンガー作用素のスペクトル解析にも応用し、固有値のスペクトル半径に対する半古典的評価式を導出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究課題は量子力学において重要な役割を果たすシュレディンガー作用素のスペクトル解析（固有値や固有関数に対する解析）に対して新たな知見を与えるものである。さらに、その応用として線形・非線形シュレディンガー方程式に対する初期値問題の解の長時間挙動解析に関する先行研究を一般化・精密化し、より広いクラスのポテンシャルを扱うことを可能にした。これは臨界なポテンシャルを持つ線形・非線形シュレディンガー方程式に対する研究において、基本的な結果になると期待される。

研究成果の概要（英文）：It is widely recognized that invariant properties under the parabolic scaling are very important for the study of global dynamics for the solutions to the Schrödinger equation. In this study, we have proved several uniform resolvent estimates for the stationary problem for the Schrödinger equation with scaling-critical potentials. As applications, we have also studied global-in-time Strichartz estimates, scattering theory for the associated nonlinear Schrödinger equation. Moreover, the uniform resolvent estimates have also been applied to obtain some semiclassical inequalities for the spectral radius of the eigenvalues for non-self-adjoint Schrödinger operators with non-symmetric potentials.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：シュレディンガー方程式 ストリッカーツ評価 一様レゾルベント評価 散乱理論 非自己共役作用素  
スペクトル理論 偏微分方程式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 定常シュレディンガー方程式の解作用素であるレゾルベントはシュレディンガー作用素のスペクトルと密接な関係がある。特に、レゾルベントのエネルギーパラメータに関する一様ノルム不等式は極限吸収原理や一様レゾルベント評価などと呼ばれ、シュレディンガー作用素の連続スペクトルや埋蔵固有値の研究に広く用いられてきた。また、一様レゾルベント評価は時間依存するシュレディンガー方程式の初期値問題の解に対する時間大域的な重み付き時空間ノルム不等式(加藤平滑化作用)と本質的に同値であることが、加藤敏夫の滑らかな摂動理論によって明らかになっている。さらに、非線形シュレディンガー方程式に代表される非線形分散型方程式の初期値問題および散乱理論の解析における基本的な道具立てである分散型評価(時間減衰評価)やストリッカーツ評価の証明においても、重要な役割を果たすことがわかっている。

(2) 一様レゾルベント評価は自由シュレディンガー作用素だけでなくポテンシャルを伴うシュレディンガー作用素に対しても、ポテンシャルに対する様々な条件のもとで、数多くの先行研究がある。特に、ポテンシャルが空間遠方において十分速く減衰する場合には、自由な場合と同様の一様レゾルベント評価やストリッカーツ評価や分散型評価が成り立つことがすでに示されており、それらは非線形問題に幅広く応用されている。一方、非線形シュレディンガー方程式の解析においては放物型尺度変換について不変な関数空間における解析が重要な役割を果たすことが知られているが、尺度不変あるいは尺度臨界なクラスに属するポテンシャルに対する一様レゾルベント評価とその応用については、未解決な問題が多く残されていた。

## 2. 研究の目的

本研究課題の主要な研究対象は自由シュレディンガー方程式を不変にする放物型尺度変換に関して不変あるいは臨界であるポテンシャルを伴う定常シュレディンガー方程式であり、そのレゾルベントに対する一様評価の証明を第一の研究目的とした。次に、対応する初期値問題の解に対する加藤型平滑化作用、ストリッカーツ評価についての解析を行った。さらに、それらを以下の二つの問題に対して応用した：

- (1)ポテンシャルを伴う非線形シュレディンガー方程式の初期値問題と散乱理論
- (2)複素数値ポテンシャルを伴う非自己共役シュレディンガー作用素そのスペクトル解析

## 3. 研究の方法

(1)文献調査と情報収集・交流：本研究課題の遂行に当たっては大規模な研究設備は必要なく、主に論文雑誌などの文献調査によって既存研究の解析および研究手法の習得を行う。また、それらに加えて国際研究会での情報収集・交流なども用いて、最新の研究手法や新たなアイデアの開拓を行う。

(2)数学的な研究手法：関数解析とスペクトル理論を中心として、線形・非線形偏微分方程式論や量子力学的散乱理論、超局所解析、実解析などを用いた。

## 4. 研究成果

本研究では以下の五つの視点から研究を行なった。

(1)尺度臨界シュレディンガー作用素に対する一様ソボレフ不等式とストリッカーツ評価。  
自由シュレディンガー方程式を不変にする放物型尺度変換に関して臨界なポテンシャルをもつシュレディンガー作用素に対して、一様レゾルベント評価の一種である一様ソボレフ不等式とその加藤平滑化作用およびストリッカーツ評価への応用について考察を行なった。まず、Burq et al (J. Funct. Anal 2003) による逆二乗べきポテンシャルに対する結果を拡張・精密化した。特に、その証明において、一様レゾルベント評価からストリッカーツ評価を導く摂動論を一般的な枠組みで整備した。この手法は様々な分散型方程式に応用できる。また、スケール臨界なルベグ空間に属するポテンシャルの場合に、自由な場合と同様の一様ソボレフ不等式と全ての許容対と一部の非許容対に対する非斉次ストリッカーツ評価を証明した。この結果は非線形分散型方程式系のエネルギー臨界空間における時間大域適切性に应用できることが、Nakanishi-Guo (Duke Math. 2023) によって明らかにされている。

(2)尺度超臨界シュレディンガー方程式に対するストリッカーツ評価。

クーロン斥力などの斥力型長距離ポテンシャルを含む尺度超臨界なポテンシャル伴うシュレディンガー方程式に対して、ストリッカーズ評価を初めて証明した。応用として、長距離型線形ポテンシャルを持つ非線形シュレディンガー方程式に対して、小さな解の漸近挙動を導出した。この結果は長距離型ポテンシャルを持つ非線形シュレディンガー方程式に対する将来的な研究の基本的な道具立てになることが期待できる。

(3) 尺度臨界非自己共役シュレディンガー作用素および非自己共役ディラック作用素の固有値に対するケラー型不等式。

一様レゾルベント評価の応用として、非自己共役作用素のスペクトル解析を行なった。まず、尺度臨界シュレディンガー作用素に尺度劣臨界な複素数値ポテンシャルを摂動した非自己共役シュレディンガー作用素の固有値問題を考察し、固有値のスペクトル半径を摂動ポテンシャルのルベーグノルムで評価するケラー不等式と呼ばれる半古典不等式を証明した。これから、摂動ポテンシャルが十分小さい場合にはスペクトルの安定性が得られる。さらに、非エルミート行列ポテンシャルを伴う非自己共役ディラック作用素に対して同様の解析を行なった。ディラック作用素の場合にはシュレディンガー作用素と同一のケラー不等式は一般には得られないことがすでに知られているが、ディラック作用素の行列構造に着目することによって、シュレディンガー作用素と同一のケラー不等式が成り立つようなポテンシャルの行列構造を導出した。

(4) 非線形分散型方程式に対する散乱理論への応用。

非線形分散型方程式の散乱理論を二つのモデルに対して考察した。まず、星型グラフ上の非線形シュレディンガー方程式を長距離型非線形項を伴う場合に考察し、頂点における任意の境界条件のもとで、大域解が自由な線形解や定在波には漸近しないことを証明し、さらに、小さな初期条件（終値条件）のもとで初期値問題（終値問題）の解が位相の修正を伴う修正自由解に漸近することを証明した。次に、尺度臨界な消散項と時間依存ポテンシャルを伴う非線形波動方程式（あるいはクライン・ゴルドン方程式）を考察し、小さな時間大域解の存在と長時間挙動について解析を行い、リュービル変換された自由解に解が漸近することを証明した。

(5) ソボレフ空間における線形散乱理論と非線形散乱理論への応用

線形シュレディンガー方程式に対する散乱理論、特に波動作用素の存在と漸近完全性について、従来とは異なった視点から考察した。これまで波動作用素は二乗可積分関数のなすルベーグ空間で構成されるのが通常であり、また線形散乱理論においてはそれで十分であったが、非線形散乱理論への応用を考慮に入れた場合にはソボレフ空間や斉次ソボレフ空間上で考察することが必要になる。そこで、波動作用素が従来の意味で存在し漸近完全である場合に、ソボレフ空間上でも存在し漸近完全になるための、ソボレフ指数とポテンシャルに対する汎用的な十分条件を提示した。さらに、これを斉次ソボレフ空間に拡張した。この条件は非線形シュレディンガー方程式を考察する上では自然な条件であり、線形ポテンシャルを伴う非線形シュレディンガー方程式の散乱問題に対する既存研究のほぼ全てに適用できる。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 2件）

|   |                               |
|---|-------------------------------|
| 1. 著者名<br>Mizutani Haruya   | 4. 巻<br>279                   |
| 2. 論文標題<br>Strichartz estimates for Schrödinger equations with slowly decaying potentials   | 5. 発行年<br>2020年               |
| 3. 雑誌名<br>Journal of Functional Analysis  | 6. 最初と最後の頁<br>108789 ~ 108789 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1016/j.jfa.2020.108789   | 査読の有無<br>有                    |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-                     |
| 1. 著者名<br>Inui Takahisa, Mizutani Haruya  | 4. 巻<br>28                    |
| 2. 論文標題<br>Scattering and asymptotic order for the wave equations with the scale-invariant damping and mass                               | 5. 発行年<br>2021年               |
| 3. 雑誌名<br>Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA   | 6. 最初と最後の頁<br>-               |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s00030-020-00671-7  | 査読の有無<br>有                    |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-                     |
| 1. 著者名<br>Aoki Kazuki, Inui Takahisa, Miyazaki Hayato, Mizutani Haruya, Uriya Kota  | 4. 巻<br>4                     |
| 2. 論文標題<br>Asymptotic behavior for the long-range nonlinear Schroedinger equation on the star graph with the Kirchhoff boundary condition | 5. 発行年<br>2022年               |
| 3. 雑誌名<br>Pure and Applied Analysis   | 6. 最初と最後の頁<br>287 ~ 311       |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.2140/paa.2022.4.287  | 査読の有無<br>有                    |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-                     |
| 1. 著者名<br>Mizutani Haruya, Schiavone Nico M.  | 4. 巻<br>34                    |
| 2. 論文標題<br>Spectral enclosures for Dirac operators perturbed by rigid potentials  | 5. 発行年<br>2022年               |
| 3. 雑誌名<br>Reviews in Mathematical Physics   | 6. 最初と最後の頁<br>-               |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1142/S0129055X22500234   | 査読の有無<br>有                    |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている (また、その予定である)  | 国際共著<br>該当する                  |

|  |                         |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名<br>Takahisa Inui, Haruya Mizutani   | 4. 巻<br>149             |
| 2. 論文標題<br>Remarks on asymptotic order for the linear wave equation with the scale-invariant damping and mass with Lr-data | 5. 発行年<br>2021年         |
| 3. 雑誌名<br>PROCEEDINGS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY   | 6. 最初と最後の頁<br>3473-3484 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1090/proc/15481   | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-               |

|  |                         |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名<br>Aoki Kazuki, Inui Takahisa, Mizutani Haruya  | 4. 巻<br>21              |
| 2. 論文標題<br>Failure of scattering to standing waves for a Schrodinger equation with long-range nonlinearity on star graph | 5. 発行年<br>2020年         |
| 3. 雑誌名<br>Journal of Evolution Equations   | 6. 最初と最後の頁<br>297 ~ 312 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s00028-020-00579-w   | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-               |

|   |                               |
|---|-------------------------------|
| 1. 著者名<br>Mizutani Haruya   | 4. 巻<br>61                    |
| 2. 論文標題<br>Scattering theory in homogeneous Sobolev spaces for Schrodinger and wave equations with rough potentials | 5. 発行年<br>2020年               |
| 3. 雑誌名<br>Journal of Mathematical Physics   | 6. 最初と最後の頁<br>091505 ~ 091505 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1063/5.0019682   | 査読の有無<br>有                    |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-                     |

|  |                           |
|--|---------------------------|
| 1. 著者名<br>Mizutani Haruya  | 4. 巻<br>13                |
| 2. 論文標題<br>Uniform Sobolev estimates for Schrodinger operators with scaling-critical potentials and applications | 5. 発行年<br>2020年           |
| 3. 雑誌名<br>Analysis & PDE   | 6. 最初と最後の頁<br>1333 ~ 1369 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.2140/apde.2020.13.1333  | 査読の有無<br>有                |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-                 |

|  |                         |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名<br>Haruya Mizutani                              | 4. 巻<br>148             |
| 2. 論文標題<br>Wave operators on Sobolev spaces            | 5. 発行年<br>2020年         |
| 3. 雑誌名<br>Proceedings of American Mathematical Society | 6. 最初と最後の頁<br>1645-1652 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1090/proc/14838         | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                 | 国際共著<br>-               |

|  |                      |
|--|----------------------|
| 1. 著者名<br>Haruya Mizutani, Junyong Zhang, Jiqiang Zheng  | 4. 巻<br>278          |
| 2. 論文標題<br>Uniform resolvent estimate for Schroedinger operator with an inverse-square potential | 5. 発行年<br>2020年      |
| 3. 雑誌名<br>Journal of Functional Analysis   | 6. 最初と最後の頁<br>108350 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1016/j.jfa.2019.108350  | 査読の有無<br>有           |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている (また、その予定である)   | 国際共著<br>該当する         |

|  |                         |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名<br>Mizutani Haruya  | 4. 巻<br>9               |
| 2. 論文標題<br>Eigenvalue bounds for non-self-adjoint Schroedinger operators with the inverse-square potential | 5. 発行年<br>2018年         |
| 3. 雑誌名<br>Journal of Spectral Theory   | 6. 最初と最後の頁<br>677 ~ 709 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.4171/JST/260  | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-               |

|   |                         |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名<br>Haruya Mizutani   | 4. 巻<br>146             |
| 2. 論文標題<br>Global-in-time smoothing effects for Schroedinger equations with inverse-square potentials | 5. 発行年<br>2018年         |
| 3. 雑誌名<br>Proceedings of the American Mathematical Society  | 6. 最初と最後の頁<br>295 ~ 307 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1090/proc/13729  | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-               |

|  |                           |
|--|---------------------------|
| 1. 著者名<br>Bouclet Jean-Marc、Mizutani Haruya  | 4. 巻<br>370               |
| 2. 論文標題<br>Uniform resolvent and Strichartz estimates for Schroedinger equations with critical singularities | 5. 発行年<br>2018年           |
| 3. 雑誌名<br>Transactions of the American Mathematical Society  | 6. 最初と最後の頁<br>7293 ~ 7333 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1090/tran/7243  | 査読の有無<br>有                |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>該当する              |

〔学会発表〕 計15件 (うち招待講演 13件 / うち国際学会 8件)

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>水谷治哉                               |
| 2. 発表標題<br>ポテンシャルを伴うシュレディンガー方程式のストリッカーツ評価について |
| 3. 学会等名<br>量子散乱における順問題と逆問題の新展開 (招待講演)         |
| 4. 発表年<br>2022年                               |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>水谷治哉                                   |
| 2. 発表標題<br>ポテンシャルを伴うシュレディンガー方程式に対する時間大域的ストリッカーツ評価 |
| 3. 学会等名<br>日本数学会秋季総合分科会 (招待講演)                    |
| 4. 発表年<br>2021年                                   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>水谷治哉  |
| 2. 発表標題<br>Strichartz estimates for Schroedinger equations with slowly decaying potentials |
| 3. 学会等名<br>スペクトル散乱理論とその周辺 (招待講演)   |
| 4. 発表年<br>2020年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Haruya Mizutani  |
| 2. 発表標題<br>Wave operator on Sobolev space   |
| 3. 学会等名<br>International Workshop on "Fundamental Problems in Mathematical and Theoretical Physics" (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>水谷治哉   |
| 2. 発表標題<br>Strichartz estimates for Schrodinger equations with slowly decaying potentials |
| 3. 学会等名<br>神楽坂解析セミナー (招待講演)   |
| 4. 発表年<br>2018年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>水谷治哉   |
| 2. 発表標題<br>Strichartz estimates for Schrodinger equations with slowly decaying potentials |
| 3. 学会等名<br>日本数学会秋季総合分科会   |
| 4. 発表年<br>2018年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>水谷治哉   |
| 2. 発表標題<br>Strichartz estimates for Schrodinger equations with slowly decaying potentials |
| 3. 学会等名<br>第 8 回 弘前非線形方程式研究会 (招待講演)   |
| 4. 発表年<br>2018年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>水谷治哉  |
| 2. 発表標題<br>On Strichartz estimates for the Schrodinger equation with decaying potentials                             |
| 3. 学会等名<br>2018 Taiwan-Japan Workshop on Scattering, Dispersion, Traveling Waves, and Inverse Problems (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2018年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>水谷治哉  |
| 2. 発表標題<br>Strichartz estimates for Schrodinger equations with slowly decaying positive potentials |
| 3. 学会等名<br>2019 Zhuhai PDE Workshop (招待講演) (国際学会)  |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>水谷治哉  |
| 2. 発表標題<br>Strichartz estimates for Schrodinger equations with positive slowly decaying potentials |
| 3. 学会等名<br>HMAセミナー・冬の研究会 2019 (招待講演)   |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Haruya Mizutani  |
| 2. 発表標題<br>Remarks on endpoint Strichartz estimates for Schrodinger equations with inverse-square potentials              |
| 3. 学会等名<br>Nonlinear Partial Differential Equations for Future Applications "Hyperbolic and Dispersive PDE" (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2017年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Haruya Mizutani   |
| 2. 発表標題<br>Uniform Sobolev estimates for Schrodinger operators                   |
| 3. 学会等名<br>TOPICS IN HARMONIC ANALYSIS - Intensive Lectures Series (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2017年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Haruya Mizutani  |
| 2. 発表標題<br>Uniform Sobolev estimates for Schrodinger operators with scaling-critical potentials |
| 3. 学会等名<br>Spectral and Scattering Theory and Related Topics (招待講演) (国際学会)                      |
| 4. 発表年<br>2017年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Haruya Mizutani  |
| 2. 発表標題<br>Uniform Sobolev estimates for Schrodinger operators with scaling-critical potentials |
| 3. 学会等名<br>2017 Taiwan Mathematical Society Annual Meeting (招待講演) (国際学会)                        |
| 4. 発表年<br>2017年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Haruya Mizutani  |
| 2. 発表標題<br>Eigenvalue bounds for non-self-adjoint Schrodinger operators with the inverse square potential |
| 3. 学会等名<br>Mathematical Aspects of Physics with Non-Self-Adjoint Operators (国際学会)                         |
| 4. 発表年<br>2017年   |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

[https://researchmap.jp/haruya\\_mizutani](https://researchmap.jp/haruya_mizutani)  
[https://scholar.google.co.jp/citations?user=aztiE\\_AAAAAJ&hl=ja](https://scholar.google.co.jp/citations?user=aztiE_AAAAAJ&hl=ja)

6. 研究組織

| 氏名<br>(ローマ字氏名)<br>(研究者番号) | 所属研究機関・部局・職<br>(機関番号) | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計6件

|  |                    |
|--|--------------------|
| 国際研究集会<br>The 15th Linear and Nonlinear Waves      | 開催年<br>2017年～2017年 |
| 国際研究集会<br>The 16th Linear and Nonlinear Waves      | 開催年<br>2018年～2018年 |
| 国際研究集会<br>The 17th Linear and Nonlinear Waves      | 開催年<br>2019年～2019年 |
| 国際研究集会<br>The 18th Linear and Nonlinear Waves      | 開催年<br>2021年～2021年 |
| 国際研究集会<br>The 19th Linear and Nonlinear Waves      | 開催年<br>2022年～2022年 |
| 国際研究集会<br>Schrödinger Operators and Related Topics | 開催年<br>2020年～2020年 |

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|