

令和 5 年 6 月 8 日現在

機関番号：17601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K14220

研究課題名(和文) 複雑な共鳴構造を持つ非線形分散型方程式の可解性について

研究課題名(英文) Solvability of nonlinear dispersive equations with complicated resonance structure

研究代表者

平山 浩之(Hirayama, Hiroyuki)

宮崎大学・教育学部・准教授

研究者番号：90748328

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：非線形シュレディンガー方程式系の初期値問題に対し、適切性が成立するソボレフ指数を共鳴構造に着目した条件によってほぼ完全に特徴付けた。また、多項式型で3階以下の空間微分を含む一般の非線形項を持つ非線形4階シュレディンガー方程式の初期値問題に対し、適切性について先行研究の改良を含む結果を得た。特に、方程式が尺度不変な場合には、尺度臨界なソボレフ空間での適切性も得られた。さらに、分散・散逸モデルの一つであるザハロフ・クズネツォフ・バーガース方程式の初期値問題の適切性を示すことで、分散のみのモデルであるザハロフ・クズネツォフ方程式よりも良い構造を持つことを明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で扱った方程式のほとんどは空間2次元以上のモデルであり、共鳴構造が複雑であるという特徴を持つ。そのような特徴は物理現象などを背景としたモデルにも現れるため、その解析は数学だけでなく現象の立場においても重要である。実際、本研究で扱った方程式も物理現象を背景としているものが多い。また、本研究の主題にもなっている分散性は波の伝播を記述するモデルに多く見られる性質であり、分散性と非線形性による影響は共鳴構造に依存する。そのため、共鳴構造を精密に調べることは、非線形分散型方程式の性質を明らかにするために重要な役割を果たす。

研究成果の概要(英文)：For the Cauchy problem of system of nonlinear Schrodinger equations, we almost completely characterized the Sobolev indexes which allows the well-posedness by the conditions focused on resonance structure. We also considered the Cauchy problem of nonlinear fourth order Schrodinger equations which have the polynomial nonlinearity with third order or lower spatial derivatives. We obtained the results for the well-posedness of this problem, which contain the improvement of the previous works. In particular, for the case that the equation has scale invariance, we obtained the well-posedness in the scaling critical Sobolev spaces. Furthermore, we clarified that the structure of Zakharov-Kuznetsov-Burgers equation, which is one of dispersive-dissipative model, is better than the structure of Zakharov-Kuznetsov equation, which has dispersion but not dissipation. To obtain this result, we prove the well-posedness of the Cauchy problem of Zakharov-Kuznetsov-Burgers equation.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：非線形分散型方程式 初期値問題 適切性 共鳴

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

非線形性を持った波、すなわち非線形波動は流体やプラズマなどの現象を記述するために重要な役割を果たす。非線形波動の持つ性質の一つに、波数の異なる波が異なる速度で伝播していく「分散性」と呼ばれるものがある。分散性を備えた非線形波動の方程式は非線形分散型方程式と呼ばれ、代表的なものとしては、浅瀬を伝わる波の伝播を記述するコルテヴェーグ・ドフリース(KdV)方程式や光ファイバーを伝わるパルス波を記述する非線形シュレディンガー方程式などが知られている。このように、非線形分散型方程式は数学だけではなく現象の立場からも重要な対象であるが、分散性と非線形性を持ち合わせるといった複雑さから、その可解性については明らかではない。特に、解の一意存在性および安定性(初期値に対する解の連続依存性)のことを「適切性」と呼ぶが、与えられた関数のクラスに属する初期値に対して適切性が成立するか否かという問題は、非線形偏微分方程式論においては基本的かつ重要である。

非線形分散型方程式の適切性については、方程式の持つある種の対称構造を利用したエネルギー法と呼ばれる手法により、正則性(滑らかさ)の十分高いクラスの初期値に対しては古くから研究がなされている。ただし、エネルギー法は分散性の有無には左右されないため、非線形分散型方程式に特化した手法とは言い難い。分散性に着目した手法としては加藤型平滑化効果やストリックーツ評価が開発され、ある程度正則性の低い関数のクラスにおいても適切性を得ることが可能となった。さらに近年では、分散性だけでなく非線形性も精密に捉えることが可能な「フーリエ制限ノルム法」と呼ばれる手法が開発され、正則性が低いクラスの初期値に対する適切性の研究は急速に進展した。このフーリエ制限ノルム法では、分散性による波と非線形性による波の周波数が一致することで生じる「共鳴」という現象を調べることが重要となる。特に、共鳴がどのような周波数帯で生じるか、共鳴が生じる周波数帯において方程式の未知関数がどのような振る舞いをするか、といった共鳴構造を明確にすることが、適切性を得ることにつながる。

### 2. 研究の目的

本研究では、非線形分散型方程式の適切性が成立するか否かを調べる。特に、共鳴構造が複雑化する傾向にある、複数の方程式の連立系や多次元の方程式を主な対象とする。共鳴が生じる周波数帯では非線形相互作用による特異性が現れるため、その影響を精密に評価する方法を確立することが本研究の目的となる。一般に、初期値の正則性が低いほど特異性の影響を受けやすくなるため、対象となる方程式の共鳴構造を精密に捉えることで、適切性と(逐次近似の意味での)非適切性の境となる初期値の正則性(以下、適切性の最良正則性と呼ぶ)を見出すことを目指す。

### 3. 研究の方法

本研究では対象となる方程式の共鳴構造を明らかにするために、周波数領域における未知関数の性質を調べる。特に、共鳴による特異性が現れる領域を細かく分割することで、フーリエ制限ノルムによる非線形項の精密な評価を導くことを試みる。その評価を利用することで、出来る限り正則性の低い初期値に対して適切性を示す。一方で、共鳴による特異性が特に強く現れる領域を特定し、そのような領域に周波数の分布が集中する関数を考えることで、逐次近似が破綻する初期値の例を構成する。特に、正則性がどの程度低い場合に非線形項が増大するかを見極めることで、最良正則性を見出すことを試みる。

### 4. 研究成果

(1) KdV 方程式の2次元版である Zakharov-Kuznetsov 方程式(以下 ZK 方程式)に、空間1方向の散逸項を加えた Zakharov-Kuznetsov-Burgers 方程式(以下 ZKB 方程式)の初期値問題について考えた。ZKB 方程式は分散性、非線形性に加えて散逸性も兼ね備えているため、散逸性の影響を取り入れたフーリエ制限ノルムを用いた。これにより共鳴構造と散逸性の両方を精密に扱うことができ、ZK 方程式では適切性が得られないクラスの初期値に対して ZKB 方程式の適切性を得ることに成功した。ZKB に対して適切性が得られたクラスの初期値は、2次元空間上の全ての方向において ZK 方程式の適切性の最良正則性よりも低い正則性しか持たないものも許容されている。そのため、1方向の散逸性が全ての方向により影響を与えているという興味深い現象が見られた。

(2) 非線形項に1階の空間微分を含む3本の非線形シュレディンガー方程式系(以下 NLS 系)の初期値問題について考えた。NLS 系はレーザーとプラズマの相互作用を記述するモデルとして導出されたものであり、レーザーに関する2つの未知関数とプラズマに関する1つの未知関数に対する連立系である。非線形項の空間微分はプラズマに関する未知関数に作用しているため、プラズマに関する未知関数の分布が高周波に集中している場合には特異性が強く現れる。また、NLS 系は線形部分にパラメータを含んでおり、その値の取り方によって共鳴構造が異なる。一般に分散型方程式の解は時間変数、空間変数のそれぞれについて振動しており、時間

変数についての振動で生じる共鳴を「時間共鳴」、空間変数についての振動で生じる共鳴を「空間共鳴」と呼ぶ。NLS系の共鳴構造は次の3つの場合に分かれる。

- (a) 共鳴が生じない
- (b) 時間共鳴、空間共鳴はそれぞれ生じるが同時には生じない
- (c) 時間共鳴と空間共鳴が同時に生じる

まず(a)の場合には非線形相互作用による特異性は弱く、そのことを利用することで適切性の最良正則性は、空間1次元の場合を除いて先行研究で解明されている。一方(c)の場合には強い特異性が生じることを利用することで、適切性の最良正則性が先行研究で明らかにされている。しかし、(b)の場合には特異性が生じるものの(c)ほど強くはなく、先行研究では2次元、3次元の場合に適切性の最良正則性を解明するには至っていない。なお、(b)の場合はさらに次の2つの場合に分かれる。

- (b-1) 高周波同士の波の相互作用により高周波の波が生成される場合にのみ共鳴が生じる
- (b-2) (b-1)以外の場合(高周波の波と低周波の波の相互作用など)でも共鳴が生じる

本研究では、周波数領域において幾何学的性質の一つである「横断性」に着目した非線形 Loomis-Whitney 型不等式を応用することで、特異性を精密に制御した評価を導いた。その結果として、(b-1)の場合に適切性の最良正則性を明らかにすることに成功した。(木下真也氏との共同研究)

(3)(2)のNLS系は球対称性を持たないが、未知関数の変換によって球対称な形に書き直せることに着目し、球対称性を持つ初期値に対する初期値問題について考えた。球対称性を課した関数に対して(b-1)、(c)の場合に生じる特異性を制御する評価を導き、2次元、3次元の場合に適切性の最良正則性が改善されることを明らかにした。(木下真也氏、岡本葵氏との共同研究) 特に、球対称を課した場合には1次元よりも2次元の方が最良正則性が低くなるという興味深い結論が得られた。

(4)(2)のNLS系の初期値問題で(b-2)の場合について考えた。この場合には高周波の波と低周波の波の相互作用により高周波の波が生成される場合、高周波同士の波の相互作用により低周波の波が生成される場合にも共鳴が生じる。そのような場合でも、プラズマに関する未知関数の高周波成分が相互作用によって共鳴を起こさなければ、非線形項の特異性は強くは現れない。そのことに着目することで双線形ストリッカーズ評価式を改良し、適切性の最良正則性を明らかにすることに成功した。さらに、(a)の場合には空間1次元における適切性の最良正則性が未解決であったが、初期値が2乗可積分関数よりも低い正則性しか持たない場合、逐次近似の第3項において強い特異性が現れることを見出した。そのことを利用することで、(a)の場合の空間1次元における適切性の最良正則性を明らかにすることに成功した。(いずれも木下真也氏、岡本葵氏との共同研究)

以上の(2)、(3)、(4)の結果により、NLS系の逐次近似の枠組みにおける適切性の最良正則性については、全ての場合において明らかになった。ただし、最良正則性とちょうど等しい正則性を持つ初期値に対する適切性については、未解決部分が残っている。

(5)(2)のNLS系の初期値問題で(b-2)の場合について考えた。特に、(4)では排除していた、プラズマに関する未知関数の高周波成分が相互作用によって共鳴を引き起こす場合を扱った。この場合、非常に強い特異性が現れるため、初期値の正則性がどれだけ高かったとしても逐次近似は破綻する。すなわち、初期値から解への写像は滑らかにはならない。そこで、逐次近似法を用いずにエネルギー法で解を構成することを試みた。その際の評価に用いるエネルギー汎関数を修正することで、強い特異性が現れる項を打ち消すことが出来ることを見出した。そのことを利用し、初期値の正則性が十分高ければ適切性が得られることを明らかにした。(木下真也氏、岡本葵氏との共同研究)

(6)非線形項に3階以下の空間微分を含む非線形4階シュレディンガー方程式の初期値問題について考えた。非線形項は多項式の枠組みで一般的なものを扱った。この方程式を積分方程式に書き換えた際のデュアメル項を周波数領域において精密に扱い、線形解のように振る舞う項と剰余項に分解できることを示した。それらの項に対して加藤型平滑化効果を利用することで非線形項の3階微分から生じる特異性を制御し、適切性の最良正則性を明らかにした。さらに、方程式が尺度不変性を持つ場合には双線形ストリッカーズ評価と非共鳴性を使い分けられることに着目し、尺度臨界な正則性を持つ初期値に対する適切性を得ることに成功した。(池田正弘氏、田中智之氏との共同研究)

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Hirayama Hiroyuki, Kinoshita Shinya, Okamoto Mamoru	4. 巻 21
2. 論文標題 A remark on the well-posedness for a system of quadratic derivative nonlinear Schrödinger equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications on Pure and Applied Analysis	6. 最初と最後の頁 3309 ~ 3309
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/cpaa.2022101	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hirayama Hiroyuki, Kinoshita Shinya, Okamoto Mamoru	4. 巻 499
2. 論文標題 Well-posedness for a system of quadratic derivative nonlinear Schrödinger equations in almost critical spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 125028 ~ 125028
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2021.125028	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Hirayama Hiroyuki, Ikeda Masahiro, Tanaka Tomoyuki	4. 巻 28
2. 論文標題 Well-posedness for the fourth-order Schrödinger equation with third order derivative nonlinearities	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00030-021-00707-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hirayama Hiroyuki, Kinoshita Shinya, Okamoto Mamoru	4. 巻 21
2. 論文標題 Well-Posedness for a system of quadratic derivative nonlinear schrödinger equations with radial initial data	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annales Henri Poincare	6. 最初と最後の頁 2611 ~ 2636
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00023-020-00931-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Hirayama Hiroyuki, Kinoshita Shinya	4. 巻 178
2. 論文標題 Sharp bilinear estimates and its application to a system of quadratic derivative nonlinear Schrodinger equations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 205 ~ 226
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.na.2018.07.013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hirayama Hiroyuki	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Local and global well-posedness for the 2D Zakharov-Kuznetsov-Burgers equation in low regularity Sobolev space	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2019.04.030	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計17件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 平山 浩之
2. 発表標題 微分型非線形シュレディンガー方程式系のほとんど最適なソボレフにおける適切性について
3. 学会等名 第60回実函数論・函数解析学合同シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 平山 浩之
2. 発表標題 Well-posedness for the nonlinear fourth order Schrödinger equation with third order derivative nonlinearities
3. 学会等名 研究集会「微分方程式の総合的研究」 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田中 智之, 平山 浩之, 池田 正弘
2. 発表標題 Well-posedness for the fourth-order Schrödinger equation with third order derivative nonlinearities
3. 学会等名 日本数学会2020年度秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 平山 浩之, 木下 真也, 岡本 葵
2. 発表標題 微分型非線形シュレディンガー方程式系の適切性に対する最良ソボレフ指数について
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 平山 浩之
2. 発表標題 非線形シュレディンガー方程式系の適切性に関する種々の結果について
3. 学会等名 第141回 日本数学会九州支部例会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroyuki Hirayama
2. 発表標題 Well-posedness for a system of quadratic derivative nonlinear Schrodinger equations with radial initial data
3. 学会等名 International Workshop on "Fundamental Problems in Mathematical and Theoretical Physics" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 平山 浩之
2. 発表標題 Well-posedness results for a system of quadratic derivative nonlinear Schrodinger equations
3. 学会等名 上智大学数学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 平山 浩之
2. 発表標題 Sharp well-posedness for system of quadratic derivative nonlinear Schrodinger equations
3. 学会等名 RIMS共同研究 非線形波動及び分散型方程式の研究 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 平山 浩之
2. 発表標題 Well-posedness for the Zakharov-Kuznetsov-Burgers equation in two space dimensions
3. 学会等名 名古屋大学微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroyuki Hirayama
2. 発表標題 Well-posedness for the Zakharov-Kuznetsov-Burgers equation in two space dimensions
3. 学会等名 The Ninth International Couference on Information (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 木下真也、平山 浩之
2. 発表標題 非線形シュレディンガー方程式系に対する双線形評価とその適切性への応用
3. 学会等名 日本数学会2018年度秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 平山 浩之
2. 発表標題 Well-posedness for a system of quadratic derivative nonlinear Schrodinger equations with radial initial data
3. 学会等名 北海道大学偏微分方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 平山 浩之
2. 発表標題 Well-posedness for a system of quadratic derivative nonlinear Schrodinger equations with radial initial data
3. 学会等名 Nonlinear Dispersive Equations in Kumamoto, 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 平山 浩之、木下 真也、岡本 葵
2. 発表標題 球対称な初期値に対する非線形シュレディンガー方程式系の適切性について
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会
4. 発表年 2019年



1. 発表者名 Hiroyuki Hirayama
2. 発表標題 Well-posedness for the Zakharov-Kuznetsov-Burgers equation in two space dimensions
3. 学会等名 Ito Workshop in Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 平山 浩之
2. 発表標題 Well-posedness for the Zakharov-Kuznetsov-Burgers equation in two space dimensions
3. 学会等名 大阪大学微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 平山 浩之
2. 発表標題 空間2次元上のZakharov-Kuznetsov-Burgers方程式の適切性について
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------