

令和 3 年 6 月 9 日現在

機関番号：12501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K14222

研究課題名(和文) 不確定特異点の代数学、幾何学、解析学とその応用

研究課題名(英文) Algebraic, geometric, and analytic studies on irregular singularity and their applications

研究代表者

廣惠 一希 (Hiroe, Kazuki)

千葉大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：50648300

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：分岐不確定特異点と平面代数曲線の芽の特異点との類似に着目し、微分方程式の小松-Malgrangeの非正則度と曲線の特異点のMilnor数を繋ぐ公式を与えることができた。さらに局所既約微分方程式のLaplace積分を考え、その特異点の周りでの解析接続を調べた。特にこのLaplace積分の相関数の臨界点と臨界値が解析接続によって描く軌跡が結び目になることを観察し、その結び目の同型類を決定した。そしてこれらの結果を大域的につなぎあわせることで微分方程式のスペクトル曲線のオイラー標数と微分方程式のKatzのリジッド指数が一致することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

不確定特異点の解析学は一般的に難しいが、この研究によって微分方程式に対応する代数曲線の不変量が微分方程式の不確定特異点の様子を非常によくとらえていることが明らかになった。これによって代数曲線における代数幾何学的な研究手法が微分方程式論へ応用できることが期待され、微分方程式論に新しい研究手法を与えることになる。

研究成果の概要(英文)：I found a formula which connects Komatsu-Malgrange irregularity of differential equations and Milnor number of corresponding plane curve singularities. Moreover, I studied the local Laplace transform of differential equations and determined isomorphism classes of knots arising from the analytic continuation of these Laplace kernels. By using this formula, I showed that the Euler characteristics of spectral curves of differential equations coincide with Katz' indices of rigidity of corresponding differential equations.

研究分野：基礎解析学

キーワード：不確定特異点 有理型接続のモジュライ空間 籠多様体 オイラー変換 特異点の合流理論

1. 研究開始当初の背景

近年 Fuchs 型 (確定特異点型) の線形常微分方程式論において Euler 変換の代数的, 幾何的, 組合せ論的研究が微分方程式の解析学を劇的に進展させている. Euler 変換は微分方程式の大域解の典型的な構成法として知られ, 特殊関数達の大域解析学で基本的な役割を果たしてきた. N. Katz はこれを現代化し, D 加群や対応する局所系の代数的変換としての再定式化を与えてモノドロミー表現や Euler 型の積分表示解の明示的構成法のアルゴリズムを明らかにした. さらに W. Crawley-Boevey は Fuchs 型方程式のアクセサリパラメーターの空間を籠多様体として実現し, Katz の代数的 Euler 変換を籠の Weyl 群作用と対応させることで Katz のアルゴリズムに表現論による解釈を与えた. これによって Euler 変換の解析学, 代数学, 幾何学, 組み合わせ論が一体となった理論が構築され, 大域解の帰納的構成法, 解のモノドロミーや接続係数の明示的決定法, 微分方程式の既約性条件の決定, また加法的 Deligne-Simpson 問題と呼ばれる与えられた局所モノドロミーを持つ既約な Fuchs 型微分方程式の存在問題の解決など数多くの成果が得られた. すなわち超幾何関数などの「特殊」な関数達に対して展開されていた特殊関数論は統一的な理論の上で展開されることになり, その理論の適応範囲は大幅に拡大した. さらに応用の幅は線形微分方程式論にとどまらない. 例えば微分方程式のモジュライの籠多様体による実現は, モジュライ空間の複素シンプレクティックの構造の決定, 幾何学的商の安定性や連結性といった幾何学の問題を同時に解決し, この幾何学的発展はモノドロミー保存変形を通じて, 高次元 Painlevé 系, Hitchin 可積分系の分類問題や Weyl 群対称性の構成に大きく貢献し現在研究が目覚ましく進展している.

2. 研究の目的

上記の理論を不確定特異点を許した一般の微分方程式へ拡張するために, 代数的 Euler 変換や Fourier-Laplace 変換の不確定特異点近傍での解析的作用の解明する. またこの研究をモノドロミー保存変形を通して高次元 Painlevé 系, Hitchin 可積分系の理論へ応用する.

3. 研究の方法

微分方程式やその局所形式解への作用の具体的な決定, その表現論, 組合せ論的構造の解明は既に完成している. Fuchs 型方程式ではこれが解析解の構造に直結したが, 不確定特異点では解析解と形式解の間にはズレ (Stokes 構造) があり, そのズレへの Euler あるいは Laplace 変換の作用を記述しなければならない. ここで重要となるのは各積分変換の積分路の Stokes 現象である. 典型的な Laplace 型関数の Airy 関数を思い出せば, 二つの独立な最急降下路が解析接続により変形, 退化, 分解し, それが Airy 関数の Stokes 現象を引き起こす. すなわち Laplace 変換において最急降下路のなすホモロジー群は解析接続によって不連続ジャンプ (Stokes 現象) を起こす. それを解析するために代数曲線の特異点の消滅サイクルホモロジーへの Picard-Lefschetz 理論を応用する. さらにこの研究をモノドロミー, Stokes 係数達の作る空間 (不確定特異点型指標多様体) の幾何学と付随する可積分系の理論へ応用する. まず指標多様体の (一般化された) 籠多様体として実現を, 上述の微分方程式の籠多様体と Stokes 構造への Euler Laplace 変換作用を Riemann-Hilbert 写像に適用することによって得る. 次にモノドロミー保存変形方程式の非線形モノドロミーに対応する, 指標多様体への組紐群作用を構成する. ここでは上記の臨界点の結び目構造が応用される. 実際 Fuchs 型のモノドロミー保存変形の非線形モノドロミーは微分方程式の特異点の配置空間から引き起こされるが, 不確定特異点のモノドロミー保存変形では上記の結び目のモジュライ空間がそれに相当する. この対応から上記の結び目の研究を非線形モノドロミーの作用へ応用することが可能となる. そしてこれらの研究を総合し数理論物理を巻き込みながら現在活発に進展している不確定特異点型モノドロミー保存変形や Hitchin 可積分系の理論への統一的研究手法を確立する.

4. 研究成果

上で記した Fourier-Laplace 変換の解析学を展開するための準備として次の結果を得た. ここでは分岐不確定特異点と平面代数曲線の芽の特異点との類似に着目した. まず局所 Fourier-Laplace 変換と代数曲線の芽の blow up の間の類似に着目し, Fourier-Laplace 変換で分岐不確定特異点が「特異点解消」できるための必要十分条件を決定した. さらにこの類似を追求し, 微分方程式の小松-Malgrange の非正則度と曲線の特異点の Milnor 数を繋ぐ公式を与えることがで

きた。

この公式は数論幾何学においてガロワ表現の分岐を測る Swan 導手と Milnor 数の間を繋ぐ Deligne の Milnor 公式と呼ばれる公式とよく似た格好をしており今後の異分野との研究交流が期待できる。さらに局所既約微分方程式の Laplace 積分を考え、その特異点の周りでの解析接続を調べた。特にこの Laplace 積分の相関数の臨界点と臨界値が解析接続によって描く軌跡が結び目になることを観察し、その結び目の同型類を決定した。

そしてこれらの結果を大域的につなぎあわせることで微分方程式のスペクトル曲線のオイラー標数と微分方程式の Katz のリジッド指数が一致することを示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Kazuki Hiroe	4. 巻 162
2. 論文標題 Index of rigidity of differential equations and Euler characteristic of their spectral curves	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Geometry and Physics	6. 最初と最後の頁 104060
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.geomphys.2020.104060	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kazuki Hiroe	4. 巻 12
2. 論文標題 On Oshima's conjecture	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Josai Mathematical Monographs	6. 最初と最後の頁 53-68
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Kazuki Hiroe	4. 巻 -
2. 論文標題 Euler characteristics of differential equations and spectral curves	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Kazuki Hiroe
2. 発表標題 不分岐不確定特異点のunfoldingと射影直線上の有理型接続のモジュライの変形
3. 学会等名 ミラー対称性の諸相 2020
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kazuki Hiroe
2. 発表標題 Confluence of singular points of Fuchsian equations and deformation of star-shaped quiver varieties
3. 学会等名 Moduli spaces, Representation theory and Quantization (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 廣惠一希
2. 発表標題 Ramified irregular singularities of differential equations and their spectral curves
3. 学会等名 代数解析学の諸問題 超局所解析及び漸近解析
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 廣惠一希
2. 発表標題 大島予想について
3. 学会等名 微分方程式と表現論
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 廣惠一希
2. 発表標題 Fuchs型方程式の特異点の合流とアクセサリーパラメーターの空間について
3. 学会等名 アクセサリーパラメーター研究会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 廣惠一希
2. 発表標題 Invariants of differential equations and algebraic curves
3. 学会等名 Differential Geometry and Differential Equations:the influence of Mirror Symmetry and Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Kazuki Hiroe, Hiroshi Kawakami, Akane Nakamura, Hidetaka Sakai	4. 発行年 2018年
2. 出版社 The Mathematical Society of Japan	5. 総ページ数 172
3. 書名 4-dimensional Painleve-type equations	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関