様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　９ 月 １１ 日現在

機関番号：３２６４２

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：１７Ｋ１４２２３

研究課題名（和文）ソボレフ超臨界の非線形偏微分方程式の解析

研究課題名（英文）Analysis of nonlinear partial differential equations with Sobolev supercritical exponent

研究代表者

菊池　弘明（Kikuchi, Hiroaki）

津田塾大学・学芸学部・准教授

研究者番号：００６１２２７７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：研究期間中に得た成果は大きく分けて3つに分かれる。一つ目の成果は、エネルギー臨界指数を含む二重べきの非線形シュレディンガー方程式の基底状態についてである。まず、適当な条件の下、基底状態は一意で非退化であることを示した。また、空間3次元において、ある状況下においては基底状態が存在しないことも分かった。次に空間2次元の指数型非線形項を持つ熱方程式に対して、特異定常解を構成した。また、その特異定常解を初期値とする正則解(時間が少しでも経つと有界になる解)が存在することを示した。結果として、初期値問題の非一意性を得た。3番目に、非等方的なシュレディンガー方程式の定在波の軌道安定性を得ることが出来た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
非線形シュレディンガー方程式の大域挙動は盛んに研究されている。この研究では、基底状態が重要な役割を果たす。しかし、ソボレフ臨界指数を含む二重べきの場合、基底状態の解析が困難であった。この問題を解決することが出来、得られた結果により、シュレディンガー方程式の大域挙動を調べられるものと思われる。
発展方程式において、初期値問題の適切性(存在、一意性、初期値連続依存性)の研究は重要な問題である。熱方程式の初期値問題の非一意性は、空間3次元以上の臨界の場合には知られていたが、空間2次元の場合は不明であった。ここでは特異定常解を構成し、さらにそれを初期値とする正則解を構成することで、非一意性を得られた。

研究成果の概要（英文）：I have mainly obtained three kind of results. First one is concerned with the ground state of nonlinear Schrodinger equations with combined power nonlinearities involving the energy critical exponent. I proved the uniqueness and non-degeneracy of the ground state. Furthermore, there is a case where no ground state exists in three space dimensions. Secondly, I have constructed a singular stationary solution to nonlinear heat equation with exponential nonlinearities in two space dimensions. In addition, we construct a regular solution (bounded solution if the time goes by) starting from the singular stationary solution. As a result, I obtained a non-uniqueness of the initial value problem. Thirdly, I have obtained the orbital stability of standing waves for anisotropic nonlinear Schrodinger equations.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：非線形シュレディンガー方程式　基底状態　ソボレフ臨界指数　非退化性　非存在　指数型非線形項　特異定常解　非一意性

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

1．研究開始当初の背景

(I)　非線形シュレディンガー方程式の基底状態の性質について

これまで非線形シュレディンガー方程式の大域挙動についての研究が盛んに行われていた。本研究でも、特にエネルギー臨界指数を含む二重べきの非線形シュレディンガー方程式に対して、解の大域挙動を調べていた。

具体的には、基底状態より大きいエネルギーを持つ解がどのような振る舞いをするかについて興味があった。ここで基底状態とは、対応する最小化問題の最小元のことである。また、最小化問題の最小元であることから、基底状態はある非線形楕円型方程式の解であることも分かる。それまでの研究により、基底状態の振動数が十分小さいならば、その基底状態よりも大きいエネルギーをもつ解に対しては調べることが出来た。

そこで、他の振動数についてはどのようになるかという疑問がある。このときに問題となるのが、基底状態の一意性、非退化性や線形不安定性などの性質が十分小さい振動数の場合は分かっているが、それ以外のときは解析することが困難であるということであった。そこで、振動数が十分大きい場合に限定すれば、調べられないかという着想に至った。

(II)　空間 3 次元の非線形シュレディンガー方程式の基底状態の非存在について

(I)を研究しているときに、空間 3 次元のときは、ある適当な条件の下、基底状態が満たす非線形楕円型方程式の解の構造が、空間 4 次元以上のときとは異なるという数値計算の結果があることを知った。その数値計算の結果を具体的に述べると、基底状態が満たす非線形楕円型方程式の正値解は、振動数が十分大きい場合は、存在せず、振動数が小さい場合は、2 つ以上存在するということを示唆していた。ここで、基底状態は正値解の一つであることに注意する。

(III)　質量臨界とエネルギー臨界べきをもつ非線形シュレディンガー方程式の大域挙動について

それまで、エネルギー臨界指数を含む二重べきの非線形シュレディンガー方程式の大域挙動を考えていたが、質量臨界冪とエネルギー臨界冪の両方を非線形項にもつという、いわゆる“double critical case”と呼ばれる場合については取り扱ってこなかった。二種類の臨界べきを持つ場合は、どのようになるかというのは自然な興味である。

(IV)　非等方的な非線形シュレディンガー方程式の定在波について

この研究では、定在波の安定性の問題について考えた。ここで、定在波というのは、時間に関しては、位相の周期的な変動しか依存しない解のことである。また、定在波が軌道安定であるというのは、初期値として定在波に少し摂動を加えて、そこから出発した解は位相や平行移動の差を除いて、定在波に近い形状のままに居続けることであり、そうでないときは、不安定であるという。非線形シュレディンガー方程式の定在波の軌道安定性についてはこれまでよく研究されていたが、非等方的なシュレディンガー方程式の定在波の安定性については不明であった。そこで、この方程式の定在波が存在するのかということと、存在したら安定であるかどうかという興味があった。

(V)　空間 2 次元の指数型非線形項をもつ熱方程式の解の非一意性について

それまで非線形熱方程式については、空間 3 次元以上の臨界ケースの場合、初期値問題の解の非一意性については知られていた。しかしながら、空間 2 次元においては、臨界ケースに相当するのが指数型非線形項になり、それまでは未解決であった。そこで、この空間 2 次元について非一意性が成立しないかどうかを調べた。

2．研究の目的

(I)　非線形シュレディンガー方程式の基底状態の性質について

最終的な目標である非線形シュレディンガー方程式の基底状態よりも大きいエネルギーを持つ解の大域挙動を調べるには、基底状態の性質を得る必要がある。具体的には、基底状態の一意性、非退化性および線形不安定性である。これらを全ての振動数に対して示すのは困難であるように思われたため、振動数が大きいときに解析できないかと考えた。振動数が大きい場合は、基底状態を適当にリスケーリングを施した関数は、タレンティ関数と呼ばれる良く知られた関数に近づくことが分かっている。このことを利用できるのではないかというのが着想の理由であ

る。

(II)　空間 3 次元の非線形シュレディンガー方程式の基底状態の非存在について

上で述べた数値計算で予想された現象に厳密な証明を与えることを試みた。そこで、まず基底状態のみに着目し、基底状態の存在・非存在が得られないかを解析してみた。

(III)　質量臨界とエネルギー臨界べきをもつ非線形シュレディンガー方程式の大域挙動について

これまでの研究のように、この “double critical case” において、まず基底状態を構成し、その基底状態より小さいエネルギーをもつ解の大域挙動を調べようとした。この場合、技術的に困難な箇所が幾つかあるが、それらを克服することが目標である。また、質量臨界の単独べきでは成り立たないことでも、エネルギー臨界冪の影響により、解析しやすくなるのではないかという考察もあった。このことを厳密に示すことも目標であった。

(IV)　非等方的な非線形シュレディンガー方程式の定在波について

この研究では、空間領域として、全空間とシリンダー領域の場合において、初期値問題の適切性や定在波の存在・安定性などについて考えた。さらには、空間領域がシリンダー領域の場合、明示的に表せる “線ソリトン” と呼ばれるものがあるが、その線ソリトンは基底状態かどうかということを判定することも目標であった。

(V)　空間 2 次元の指数型非線形項をもつ熱方程式の解の非一意性について

発展方程式において適切性（解の存在、一意性、初期値連続依存性）を調べることは基本的であり、重要である。空間 3 次元以上における非線形熱方程式の臨界ケースでは、ある特定の初期値においては、解が 2 つ以上あり、非適切であることが知られていたが、空間 2 次元においては対応する結果は知られていなかった。そこで、空間 2 次元について、特定の初期値において、解が 2 つ以上あるかどうかを調べることが目的であった。

3．研究の方法

(I)　非線形シュレディンガー方程式の基底状態の性質について

上で述べたように、振動数が大きい場合、基底状態に適当なリスケーリングを施すと、その関数はタレンティ関数と呼ばれる良く性質の知られた関数にある位相で近づく。このことを利用して、基底状態の一意性や非退化性が得られないかを試みた。しかしながら、空間 5 次元以上の場合は、一意性等を得るためには、基底状態をリスケールした関数が、既に分かっている位相だけでなく、L^{2}の意味でもタレンティ関数に近づくことを示す必要があった。これを示すのに、基底状態の一様減衰評価を得ることが出来ないかどうかを試みた。そこで、ケルビン変換と呼ばれる変換と楕円型正則理論を組み合わせることで、この減衰評価を得ようとした。

(II)　空間 3 次元の非線形シュレディンガー方程式の基底状態の非存在について

まず、空間 3 次元において、ある条件下では、振動数が十分大きい基底状態が存在しないことを示そうと試みた。具体的には、背理法を用いて、もし振動数が十分大きいときに基底状態が存在したと仮定すると、(I)と同様に、基底状態に適当なリスケーリングを施すとタレンティ関数と呼ばれる関数に近づくことが分かる。3 次元の場合、他と異なるのは、タレンティ関数が L^{2} に属さないことである。このことは、タレンティ関数でのまわりでの線形化作用素のレゾルベント展開に違いが生じる。この違いを利用して、基底状態が存在すると仮定したことに矛盾が導けないかどうかということを試みた。

(III)　質量臨界とエネルギー臨界べきをもつ非線形シュレディンガー方程式の大域挙動について

基底状態が存在することを示すために、これまでのように凝集コンパクト性を用いて、対応する最小化問題を解くことを試みた。しかしながら、通常の方法では、最小化問題の最小化列が非自明な関数に収束することを示すことが出来ない。そこで、最小化問題で表れる下限の値（基底状態値）を Gagliardo-Nirenberg の不等式の最小定数と比べることで、この問題を解決できないかどうかを試みた。

(IV)　非等方的な非線形シュレディンガー方程式の定在波について

通常のシュレディンガー方程式は、ビリアル等式や基底状態の性質を用いて、定在波の安定性を解析できることが良く分かっている。しかしながら、非等方的な非線形シュレディンガー方程式の場合は、有用なビリアル等式はこれまで得られていない。また、基底状態の性質を得ることも容易ではなかった。そこで、非線形項が L^{2}劣臨界のときは、Cazenave-P.L.Lions(1983)による L^{2}ノルム一定の下で、最小化問題を考え、これと保存量を用いることで解析できないかを試みた。また、非線形項が L^{2}優臨界のときは、Grillakis-Shatah-Strauss(1986)の一般論の議論を適用できないかを調べてみた。

(V)　空間 2 次元の指数型非線形項をもつ熱方程式の解の非一意性について

これまでの初期値問題の非一意性を得た結果では、幾つか手法があり、その中の一つに、まず特異定常解が存在することを示し、そして、それを初期値とする正則解を示すという方法があった。この手法が、空間 2 次元の指数型非線形項をもつ熱方程式においても適用できないかを試みた。この場合、特異定常解を得ることは自明ではないが、Merle-Peletier(1991)による手法と狙い打ち法を用いて、構成できないか計算してみた。

4．研究成果

(I)　非線形シュレディンガー方程式の基底状態の性質について

上記の方法で、基底状態は、空間 5 次元以上の場合は、L^{2}の意味でタレンティ関数に近づくことが分かり、これを利用して、振動数が十分大きい場合は、基底状態は一意であることを示すことが出来た。また、空間 5 次元以上のときの基底状態の非退化性も得ることが出来た。空間 3 次元についてもレゾルベント評価を用いることで非退化性を得ることが出来た（空間 3 次元のとき、基底状態の一意性は他の結果により得られていた）。さらには、タレンティ関数の線形不安定性を利用して、基底状態は、振動数が大きい場合は、線形不安定であることも分かった。

(II)　空間 3 次元の非線形シュレディンガー方程式の基底状態の非存在について

上記の方法と基底状態が存在することの十分条件を用いることで、ある臨界の振動数が存在して、それより振動数が小さければ、基底状態は存在し、それより大きければ、基底状態は存在しないことが分かった。今後の課題は、この臨界振動数のときに基底状態が存在するかどうかということである。また、それに関連した正値解の分岐構造についても解析する予定である。

(III)　質量臨界とエネルギー臨界べきをもつ非線形シュレディンガー方程式の大域挙動について

上に述べた方法を用いて、空間次元が 4 以上の場合、全ての振動数に対して、基底状態が存在することが分かった。また、質量臨界べきとエネルギー臨界べきの両方を含む一般の非線形項に拡張することが出来た。さらには、基底状態の変分法的特徴づけを用いることで、あるポテンシャル井戸を定義し、そこから出発する解は、初期値が球対称関数である場合は、有限時間で爆発することが分かった。

(IV)　非等方的な非線形シュレディンガー方程式の定在波について

空間領域が全空間のときに得た結果は以下のとおりである。初期値問題に関しては、エネルギークラスと呼ばれるよりも少し正則性を課した空間において、局所適切性を示すことが出来た。また、非線形項が L^{2}劣臨界の場合は、軌道安定性よりも弱い意味での安定性を得ることが出来た。この結果から、もし基底状態が一意であることが分かれば、軌道安定性が分かる。そして、非線形項が L^{2}優臨界の場合は、不安定性を得ることが出来た。L^{2}界の場合は不明であり、今後の課題である。

次に空間領域がシリンダーのときに得た結果は以下のとおりである。L^{2}劣臨界のときは、ある臨界振動数が存在して、その振動数が小さい場合、線ソリトンは安定であり、その振動数よりも大きい場合、線ソリトンは不安定である。ここで、L^{2}臨界や優臨界のときは、既に全ての振動数に対して不安定であることが分かっていることに注意する。臨界振動数の場合の安定性については、現在、解析をしているところである。また、それとは別の臨界振動数が存在して、その振動数より小さいと、基底状態は線ソリトンと一致し、その振動数より大きい場合、基底状態は線ソリトンではないことも分かった。

(V)　　空間 2 次元の指数型非線形項をもつ熱方程式の解の非一意性について

上記の方法を用いて、空間 2 次元で指数増大度を持つある非線形項に対して、原点で発散する特異定常解を構成し、その特異定常解を初期値とする正則解を構成することが出来た。結果として、初期値問題の解の非一意性を得ることが出来た。

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　4件／うち国際共著　3件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Akahori Takafumi、Slim Ibrahim、Ikoma Norihisa、Kikuchi Hiroaki、Hayato Nawa	4．巻 58
2．論文標題 Uniqueness and nondegeneracy of ground states to nonlinear scalar field equations involving the Sobolev critical exponent in their nonlinearities for high frequencies	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6．最初と最後の頁 1-32
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1007/s00526-019-1556-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Takafumi Akahori; Slim Ibrahim; Hiroaki Kikuchi; Hayato Nawa	4．巻 -
2．論文標題 Global dynamics above the ground state energy for the combined power-type nonlinear Schrodinger equations with energy-critical growth at low frequencies	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Memoirs of the American Mathematical Society	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Akahori Takafumi、Kikuchi Hiroaki、Yamada Takeshi	4．巻 25
2．論文標題 Virial functional and dynamics for nonlinear Schr?dinger equations of local interactions	5．発行年 2018年
3．雑誌名 Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA	6．最初と最後の頁 1-27
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1007/s00030-018-0497-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kikuchi Hiroaki、Wei Juncheng	4．巻 148
2．論文標題 A bifurcation diagram of solutions to an elliptic equation with exponential nonlinearity in higher dimensions	5．発行年 2017年
3．雑誌名 Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics	6．最初と最後の頁 101-122
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1017/S0308210517000154	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計18件（うち招待講演　11件／うち国際学会　4件）

1．発表者名 菊池弘明
2．発表標題 Ground states to combined power-type nonlinear Schrodinger equations in three space dimensions
3．学会等名 広島数理解析セミナー（招待講演）
4．発表年 2019年

1．発表者名 菊池弘明
2．発表標題 Non-uniqueness for an energy-critical heat equation on R^2
3．学会等名 応用数理解析セミナー（招待講演）
4．発表年 2019年

1．発表者名 菊池弘明
2．発表標題 Ground states to combined power-type nonlinear Schrodinger equations in three space dimensions
3．学会等名 第30回さいたま数理解析セミナー（招待講演）
4．発表年 2019年

1．発表者名 菊池弘明
2．発表標題 Non-uniqueness for an energy-critical heat equation on R^2
3．学会等名 愛媛大学における微分方程式セミナー
4．発表年 2019年

１．発表者名 菊池弘明
２．発表標題 Ground states to combined power-type nonlinear Schrodinger equations in three space dimensions
３．学会等名 第164回神楽坂解析セミナー（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 菊池弘明
２．発表標題 Ground states to combined power-type nonlinear Schrodinger equations in three space dimensions
３．学会等名 九州関数方程式セミナー（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 菊池弘明
２．発表標題 Minimization problem associated with ground states to combined power-type nonlinear Schrodinger equations in three space dimensions
３．学会等名 「応 用 解 析 」 研 究 会（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Hiroaki Kikuchi
２．発表標題 Ground states to combined power-type nonlinear Schrodinger equations in three space dimensions
３．学会等名 CAIMS-SCMAI Annual Meeting（国際学会）
４．発表年 2019年

1. 発表者名
菊池弘明

2. 発表標題
Ground states to combined power-type nonlinear Schrodinger equations in three space dimensions

3. 学会等名
Mini Workshop on Variational Problems（招待講演）（国際学会）

4. 発表年
2019年

1. 発表者名
Hiroaki Kikuchi

2. 発表標題
Uniqueness and nondegeneracy of ground states to nonlinear scalar field equations involving the Sobolev critical exponent in their nonlinearities.

3. 学会等名
Applied math seminar (University of Victoria)

4. 発表年
2018年

1. 発表者名
Hiroaki Kikuchi

2. 発表標題
Minimization problem associated with ground states to combined power-type nonlinear Schr\"odinger equations

3. 学会等名
2018 CMS Winter Meeting（国際学会）

4. 発表年
2018年

1. 発表者名
Hiroaki Kikuchi

2. 発表標題
Minimization problem associated with ground states to combined power-type nonlinear Schr\"odinger equations

3. 学会等名
Applied math seminar (University of Victoria)

4. 発表年
2019年

1．発表者名 菊池弘明
2．発表標題 Uniqueness of ground states to nonlinear scalar eld equations involving the Sobolev critical exponent in their nonlinearities
3．学会等名 非線形問題への常微分方程式の手法によるアプローチ
4．発表年 2018年

1．発表者名 菊池弘明
2．発表標題 Uniqueness of ground states to nonlinear scalar field equations involving the Sobolev critical exponent in their nonlinearities
3．学会等名 第15回浜松偏微分方程式研究集会（招待講演）
4．発表年 2017年

1．発表者名 菊池弘明
2．発表標題 指数型非線形項をもつ楕円型方程式の正値解の分岐ダイアグラムについて
3．学会等名 九州関数方程式セミナー（招待講演）
4．発表年 2017年

1．発表者名 菊池弘明
2．発表標題 Singular solutions and bifurcation diagrams of elliptic equations with exponential nonlinearity
3．学会等名 愛媛大学における微分方程式セミナー
4．発表年 2017年

１．発表者名 菊池弘明
２．発表標題 Virial functional and global dynamics for a class of nonlinear Schrodinger equations
３．学会等名 RIMS 調和解析学と非線形偏微分方程式（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2017年

１．発表者名 菊池弘明
２．発表標題 Singular solutions and bifurcation diagrams of elliptic equations with exponential nonlinearity
３．学会等名 第147回神楽坂解析セミナー（招待講演）
４．発表年 2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考