

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 3 年 6 月 14 日現在

機関番号：12612

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K14224

研究課題名(和文)非有界領域における二相流の基礎方程式の数学解析

研究課題名(英文)Mathematical analysis of two-phase flow equations in unbounded domains

## 研究代表者

齋藤 平和 (Saito, Hirokazu)

電気通信大学・情報理工学域・准教授

研究者番号：30754882

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題では、非有界領域における二相流基礎方程式の数学解析を行った。まず、一般領域においてシャープな界面を伴う二相Navier-Stokes方程式の時間局所的適切性を示した。さらに、同方程式を全空間において考察した。全空間の場合には、界面が閉曲面のときに小さな初期値に対する時間大域的適切性を示し、平面を少し曲げた超曲面のような界面のときに線形時間発展作用素の時間減衰評価を導出した。また、拡散界面モデルの一つとして知られるNavier-Stokes-Korteweg方程式を考察し、線形化問題に対して最大正則性定理を証明した。さらに、最大正則性定理を用いて同方程式の適切性を示した。

## 研究成果の学術的意義や社会的意義

二相流基礎方程式として、シャープな界面を伴う二相Navier-Stokes方程式およびNavier-Stokes-Korteweg方程式を非有界領域において考察した。非有界領域における二相流の場合には、Helmholtz分解や最大正則性といった数学解析のための基礎的な理論が構築されていなかった。本研究では、そのような基礎的な理論の構築からはじめて、二相流基礎方程式の時間局所的適切性や時間大域的適切性を証明し、線形化問題および非線形問題の解の長時間挙動を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：The aim of this research project is the mathematical analysis for two-phase flow equations in unbounded domains. First, we proved the local wellposedness of two-phase Navier-Stokes equations with a sharp interface in general domains. In addition, we considered the two-phase Navier-Stokes equations in the whole space. We then established the global wellposedness for small initial data and a closed interface, and also proved time-decay estimates of a time evolution operator for a nearly flat interface. Next, we considered the Navier-Stokes-Korteweg equations which are known as one of diffuse interface models and proved the maximal regularity theorem for the linearized problem. As an application of the maximal regularity theorem, we proved the wellposedness of the Navier-Stokes-Korteweg equations.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：二相流 粘性流体 非有界領域 最大正則性 時間減衰評価 Helmholtz分解 二相Navier-Stokes方程式 Navier-Stokes-Korteweg

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

2つの相を伴う流れを二相流という。例えば、水と油の混合液は、2つの液相を伴う二相流であり、水中における気泡の運動は、液相と気相を伴う二相流である。2つの相の境界を界面と呼び、二相流の基礎方程式は、シャープ界面モデルと拡散界面モデルに大別される。シャープな界面は厚さをもたない界面を表し、拡散界面は適当な厚さをもった界面を表す言葉である。本研究では、シャープ界面モデルの一つとして知られる、非圧縮性粘性流体に対する二相 Navier-Stokes 方程式を中心に考察する。有界領域の場合には、Denisova (2008, 2014), Denisova-Solonnikov (2011), Köhne-Prüss-Wilke (2013)において、時間大域解の一意存在定理が示されている。また、Tice-Kim (2014)は水平方向に周期的な層状領域の場合を考察している。一方、非有界領域に関しては、Denisova (1994), Denisova-Solonnikov (1996)において、界面が閉曲面のときに、界面に囲まれた有界領域とその外部領域がそれぞれ異なる流体に満たされている状況を考察し、時間局所解の一意存在定理を示している。また、Prüss-Simonett (2010), Prüss-Shimizu (2012)では、平面を少し曲げた超曲面のような界面のときに、界面の上側と下側がそれぞれ異なる流体に満たされている状況が考察されている。Prüss-Simonett (2010)は、上側流体の密度が下側流体の密度よりも大きい場合に上下の流体の位置が入れ替わる、Rayleigh-Taylor 不安定性と呼ばれる現象が生じることを示し、Prüss-Shimizu (2012)は、相転移現象を伴う場合に時間局所解の一意存在定理を示している。本研究では、非有界領域に着目し、領域の一般化や解の時間大域的な性質の観点から、二相流基礎方程式の数学解析を行う。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、非有界領域における二相流基礎方程式を考察し、その適切性や解の長時間挙動を明らかにすることである。まずは、上述の先行研究で扱われているような非有界領域を含む、より一般の領域のクラスを定義して、それらの領域における二相 Navier-Stokes 方程式の時間局所的適切性の理論を構築する。以下では、Denisova (1994), Denisova-Solonnikov (1996)で考察された、界面が閉曲面の場合をコンパクト界面型と呼び、Prüss-Simonett (2010), Prüss-Shimizu (2012)で考察された、平面を少し曲げた超曲面のような界面の場合を非コンパクト界面型と呼ぶ。本研究ではさらに、これらのコンパクト界面型および非コンパクト界面型の問題に対して、時間大域的適切性や解の長時間挙動を明らかにすることを旨とする。

## 3. 研究の方法

本研究では、滑らかな界面をもち、二相流に関連する Helmholtz 分解が成り立つ領域を一般領域と定義する。Maryani-Saito (2017)による一般領域上の線形化問題に対する最大正則性定理と Banach の不動点定理を組み合わせることで、一般領域における二相 Navier-Stokes 方程式の時間局所的適切性を示す。コンパクト界面型と非コンパクト界面型の問題に対する解の時間大域的な性質の研究に関しては、まずは線形化作用素の詳細なスペクトル解析を行い、それから生成される時間発展作用素の時間減衰評価を導出する。さらに、得られた時間減衰評価と線形化問題に対する最大正則性定理を組み合わせることで時間大域的適切性および解の長時間挙動を明らかにする。

## 4. 研究成果

### (1) 一般領域における二相 Navier-Stokes 方程式

密度が不均質な場合の非圧縮性粘性流体に対する二相 Navier-Stokes 方程式を一般領域において考察した。Lagrange 変換を用いて固定領域の問題に書き直して線形化問題を導出すると、密度が均質な場合と同様となり、Maryani-Saito (2017)より線形化問題に対して最大正則性定理が成り立つ。それにもとづいて不動点定理を適用することで、最大正則性のクラスにおける時間局所的適切性を示した。特に、初期密度を定数に取れば、密度が均質な場合の時間局所的適切性が得られる。

### (2) 楕円型の二相問題

一般領域の定義に現れる Helmholtz 分解が成り立つことは、ある楕円型の二相問題が一意可解であることと同値となる。全空間においてその楕円型問題を考察し、界面が次の3つの場合に対して一意可解性を示した。①平面、②平面を少し曲げた超曲面、③閉曲面。有界領域の場合には、Köhne-Prüss-Wilke (2013), Prüss-Simonett (2016)において一意可解性が示されており、本結果はそれらの非有界領域への拡張とみなすことができる。特に、いま述べた領域はすべて一般領域の例となり、研究成果(1)より、Lagrange 変換後の固定領域が①、②、③または有界領域となるような二相 Navier-Stokes 方程式に対して時間局所的適切性が成り立つ。

### (3) コンパクト界面型の問題

重力の影響を無視した場合に、表面張力を伴うコンパクト界面型の問題を考察した。線形化作用素に対するレゾルベント問題を考察し、原点近傍におけるレゾルベント展開を導出した。そして、線形化作用素から生成される時間発展作用素に対する局所減衰定理を導き、Iwashita (1989) の方法にもとづいて線形時間発展作用の時間減衰評価を導出した。得られた時間減衰評価と線形化問題に対する最大正則性を組み合わせることで、時間局所解を延長するためのアプリオリ評価を導出し、小さな初期値に対する時間大域的適切性および解の長時間挙動を明らかにした。

### (4) 非コンパクト界面型の問題

重力と表面張力がともに働く場合に非コンパクト界面型の問題を考察した。上側流体の密度が下側流体の密度よりも大きい場合には、Prüss-Simonett (2010) により Rayleigh-Taylor 不安定性が示されているので、本研究では上側流体の密度が下側流体の密度よりも小さい場合を考察した。フーリエ変換を用いて、線形化作用素に対する詳細なスペクトル解析を行い、それから生成される時間発展作用素の時間減衰評価を導出した。当初の予定よりもスペクトル解析に時間がかかってしまい、非線形問題への応用までは進まなかった。これは今後の課題である。

### (5) 拡散界面モデル

研究期間の途中に、拡散界面モデルの一つとして知られる、Navier-Stokes-Korteweg 方程式について研究する機会を得た。Bresch-Desjardins-Lin (2003) が同方程式の境界値問題を弱解の枠組みで扱っている。一方、強解の枠組みでは Kotschote (2008, 2014) において、外部領域の場合の時間局所的適切性、さらに有界領域の場合に非自明な定常解の存在および安定性が示されている。本研究では、外部領域や有界領域を含むような一様  $C^3$  領域において変数係数を伴う線形化問題を考察し、時間  $L^p$  空間  $L^q$  枠での最大正則性定理を示した。最大正則性定理を応用して、一様  $C^3$  領域上の Navier-Stokes-Korteweg 方程式の時間局所的適切性を示し、さらに有界領域の場合には小さな初期値に対する時間大域的適切性を示した。これらの結果は、Kotschote (2008, 2014) の結果の一部を、領域および関数空間の観点から一般化している。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 8件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 H. Saito, Y. Shibata, X. Zhang	4. 巻 52
2. 論文標題 Some free boundary problem for two-phase inhomogeneous incompressible flows	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Mathematical Analysis	6. 最初と最後の頁 3397--3443
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1137/18M1225239	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 H. Saito	4. 巻 44
2. 論文標題 Existence of R-bounded solution operator families for a compressible fluid model of Korteweg type on the half-space	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Methods in the Applied Sciences	6. 最初と最後の頁 1744--1787
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1002/ma.6875	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 H. Saito	4. 巻 9
2. 論文標題 Time-decay estimates for linearized two-phase Navier-Stokes equations with surface tension and gravity	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematics	6. 最初と最後の頁 1--43
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3390/math9070761	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 H. Saito	4. 巻 2171
2. 論文標題 On a compressible fluid model of Korteweg type in a maximal regularity class	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 87--98
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 H. Saito, X. Zhang	4. 巻 -
2. 論文標題 Unique solvability of elliptic problems associated with two-phase incompressible flows in unbounded domains	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete & Continuous Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2021051	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 H. Saito	4. 巻 268
2. 論文標題 On the maximal $L_p$ - $L_q$ regularity for a compressible fluid model of Korteweg type on general domains	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 2802--2851
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2019.09.040	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S. Inna, H. Saito, Y. Shibata	4. 巻 8
2. 論文標題 On some nonlinear problem for the thermoplate equations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Evolution Equations & Control Theory	6. 最初と最後の頁 755--784
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/eect.2019037	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 H. Saito	4. 巻 62
2. 論文標題 Compressible fluid model of Korteweg type with free boundary condition: model problem	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Funkcialaj Ekvacioj	6. 最初と最後の頁 337--386
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1619/fesi.62.337	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Saito	4. 巻 264
2. 論文標題 Global solvability of the Navier-Stokes equations with a free surface in the maximal $L_p$ - $L_q$ regularity class	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 1475--1520
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2017.09.045	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計16件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 Hirokazu Saito
2. 発表標題 非圧縮性二相流に関する楕円型問題について
3. 学会等名 応用解析研究会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hirokazu Saito
2. 発表標題 On the two-phase Navier-Stokes equations in unbounded domains
3. 学会等名 International Workshop on the Multi-Phase Flow; Analysis, Modeling and Numerics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hirokazu Saito
2. 発表標題 On the two-phase free boundary problem for incompressible viscous flows
3. 学会等名 微分方程式の総合的研究 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 H. Saito, X. Zhang
2. 発表標題 On elliptic problems associated with two-phase incompressible flows in unbounded domains
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hirokazu Saito
2. 発表標題 Local solvability of the Navier-Stokes-Korteweg system on general domains
3. 学会等名 Workshop on the Navier-Stokes flow (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hirokazu Saito
2. 発表標題 Local solvability of the Navier-Stokes-Korteweg equations in the maximal regularity class
3. 学会等名 日本数学科2018年度秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hirokazu Saito
2. 発表標題 On a compressible fluid model of Korteweg type in a maximal regularity class
3. 学会等名 RIMS Workshop on Mathematical Analysis of Viscous Incompressible Fluid (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hirokazu Saito
2. 発表標題 A maximal regularity approach to compressible fluid models of Korteweg type
3. 学会等名 第8回室蘭非線形解析研究会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hirokazu Saito
2. 発表標題 Decay properties of solutions for some linearized system of the Navier-Stokes equations with a free surface
3. 学会等名 Workshop on Mathematical Fluid Dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hirokazu Saito
2. 発表標題 Maximal regularity for the Navier-Stokes-Korteweg system and its application
3. 学会等名 The 15th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hirokazu Saito
2. 発表標題 Local solvability of the Navier-Stokes-Korteweg system on general domains
3. 学会等名 International Workshop on the Multi-Phase Flow; Analysis, Modeling and Numerics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hirokazu Saito
2. 発表標題 On a compressible fluid model of Korteweg type
3. 学会等名 RIMS Workshop on Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hirokazu Saito
2. 発表標題 Maximal regularity for a compressible fluid model of Korteweg type and its application
3. 学会等名 若手による流体力学の基礎方程式の研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hirokazu Saito
2. 発表標題 Maximal Lp-Lq regularity for a compressible fluid model of Korteweg type on general domains
3. 学会等名 日本数学会2017年度秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 T. Bodnar, G. P. Galdi, S. Necasova (Eds.)	4. 発行年 2020年
2. 出版社 Birkhauser Basel	5. 総ページ数 638
3. 書名 Fluids Under Pressure	

〔産業財産権〕

〔その他〕

--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------