

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 3 年 5 月 17 日現在

機関番号：35302

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K14226

研究課題名（和文）フラクタル解析による常微分方程式系の安定性理論の構築

研究課題名（英文）Construction of stability theory of ordinary differential systems by fractal analysis

研究代表者

鬼塚 政一 (Onitsuka, Masakazu)

岡山理科大学・理学部・准教授

研究者番号：20548367

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題の主な成果は、フラクタル解析を使用した2次元線形系と非線形系の安定性理論の構築、および線形微分方程式と差分方程式におけるウラム安定性と最良のウラム定数の導出である。2次元非線形系（準線形系を含む）の螺旋軌道に関する有限長・無限長を判定する十分条件、または必要十分条件を得るに至り、また、一般化三角関数を用いた極座標変換で2次元準線形系の摂動問題に関する精密な結果を与えることにも成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

2次元系の平衡点に巻きつく解軌道の複雑さの度合いは、解軌道の長さが有限か無限かの2つに分けられ、さらに無限の長さのとき、フラクタル次元により明確な数値として表せる。ここで、複雑さの度合いを安定性の度合いと言い換えれば、本研究は、新たな安定性解析の確立を実現したと言える。また、摂動問題の一つであるウラム安定性は、実方程式と摂動方程式（近似方程式）との解の誤差を精密に研究することで、現象を記述する数理モデルへ応用できる。実際に、本研究では、カラテオドリ型微分方程式のウラム安定性とそのウラム定数を導出し、得た結果を物体の表面温度に関する数理モデルへ応用し、厳密解と近似解の正確な誤差を与えた。

研究成果の概要（英文）：The main results of this research project are the construction of stability theory for two-dimensional linear systems and nonlinear systems by using fractal analysis, and the derivation of Ulam stability and best Ulam constants in linear differential equations and difference equations. Sufficient conditions and a necessary and sufficient condition for the rectifiability of spiral orbits for two-dimensional nonlinear systems (including quasi-linear systems) are obtained. We also succeeded in giving precise results on the perturbation problem of a two-dimensional quasi-linear system by polar coordinate transformation using generalized trigonometric functions.

研究分野：数物系科学

キーワード：フラクタル解析 2次元系 安定性理論 ウラム安定性 ウラム定数 摂動問題

1. 研究開始当初の背景

近年、クロアチアの数学者等は、2階線形常微分方程式の $t \rightarrow +0$ のときの解 $x(t)$ の振動の度合いを数値で表すアイデアを打ち出した¹⁾。彼らが数値化に用いたのは、図1の様な曲線の ε 近傍の面積で測るミンコフスキー次元²⁾である。例えば、長さが有限の曲線の次元は1であるが、図2に示す $0 < t \leq 0.8$ のときの $\sqrt{t} \sin(t^2)$ の次元は1.5として求まる。また、曲線を覆う一辺 ε の正方形の最小数で測るボックス次元でも同じ値を得る。本研究ではこれ等を総称してフラクタル次元と呼び、導出方法をフラクタル解析と呼ぶこととする²⁾。一般

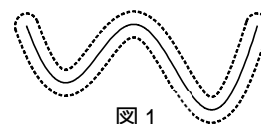


図1

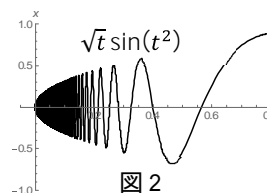


図2

に、長さ無限大の曲線の次元は1より大きい可能性があり、曲線の複雑さの度合いが高い程、次元は2に近づく。参考文献¹⁾を含む先行研究では、常微分方程式の解を「具体的な関数」 $+\delta(t)$ ($\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = 0$) で表す漸近解析を行うことで、フラクタル次元の導出を可能とした。

当該研究代表者はこれまで2次元系の解の安定性を研究してきた(業績[1-7,12,14,15,18-20]を参照)。常微分方程式の安定性の研究は19世紀末からポアンカレを初め数多くなされており、数理生物学(生物系)や数理工学(回路系)で重要な基礎研究として位置付けられる。また、安定性理論には、リプシッツ条件を満たさないため解の漸近解析が困難な非線形系の数理モデルに対しても、リヤプノフの直接法や相平面解析など有効な解析手法が数多くある。

2次元系の解 $(x(t), y(t))$ が xy 平面上で t が変化することにより描く曲線を解軌道と呼び、 xy 平面を相平面と呼ぶ。図3の様に、原点近傍から始まるすべての解軌道が $t \rightarrow \infty$ で原点に漸近するとき、原点は漸近安定と言う。加えて、すべての解軌道が $t \rightarrow \infty$ で原点の周囲を無限に回転し続けるとき、螺線と呼ぶ。線形系に限れば、既存の漸近安定性の分類は指数安定と漸近安定の2種類である。指数安定は解のノルムを抑える指数関数の減衰オーダーから解軌道が原点に漸近する度合いの数値化が可能だが、単なる漸近安定ではこれに類する指標はない。そこで、フラクタル次元を用いて漸近安定性の度合いを数値化できないか?との着想に至った。

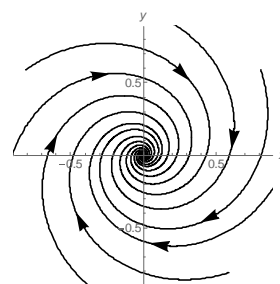


図3

- 1) M. Pašić, D. Žubrinić, V. Županović, Oscillatory and phase dimensions of solutions of some second-order differential equations. Bull. Sci. Math. 133 (2009), no. 8, 859–874.
- 2) K. Falconer, *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley-Sons, 1999.

2. 研究の目的

本研究の目的は、2次元常微分方程式系(以後、2次元系と呼ぶ)の解の螺線軌道の長さ^{らせん}とフラクタル次元を測り、漸近安定性の度合いを数値化した指標を手がかりに、フラクタル解析による安定性理論を構築することである。関連研究との相違点は、2次元系を扱う点、時刻無限大で考察する点、解の漸近解析を用いない点である。フラクタル解析にリヤプノフの手法や相平面解析を組み込む手法は、準線形系、捕食者-被食者系、リエナール系の諸問題へ応用が可能である。2次元系の平衡点に巻きつく解軌道の複雑さの数値化に挑む。

3. 研究の方法

本研究では、以下の小研究テーマ A) ~ D) を遂行した。

- A) 解軌道の無限回転・有限回転の判定法の確立
- B) 螺旋軌道の無限長・有限長の判定法の確立
- C) フラクタル次元の解析
- D) 曲線の近傍に関連するウラム安定性の研究

テーマ A) ~ C) の問題解決にこれまで培ったリヤプノフの直接法や相平面解析が役立つことが判明していたため、これらの手法を中心に、線形系や準線形系のフラクタル解析を行った。また、D) のウラム安定性については、これまで扱ってきた線形系の理論を駆使することで、多数の新たな成果が得られた。

4. 研究成果

本研究課題の主な成果は、2次元線形系及び非線形系に対するフラクタル解析による安定性理論の構築と線形微分方程式及び差分方程式におけるウラム安定性と最良ウラム定数の導出である。ウラム安定性は、関数方程式の近似解と厳密解の近さ(精度)を保証する性質であり、コンピュータサイエンスにおける有用性が知られている。具体的には、近似解の近傍を考察し、その近傍内に厳密解が常に存在するときウラム安定であると言う。フラクタル解析を行う上で重要となるボックス次元の定義においても解の近傍を考察し、その内部の面積を解析することでボックス次元を導出するため、ウラム安定性との関連が深いことに着目し、研究を推進した。当該研究期間中にボックス次元との関わりまでは明らかにされなかったが、定数刻み幅をもつ1階線形差分方程式、2階線形差分方程式、周期係数をもつ1階線形微分方程式、2階線形微分方程式に関する成果を得た。特に、ウラム安定性を考察するうえで最も重要なのが、近似解と厳密解の近さ(精度)を数値として表すウラム定数である。何かしらのウラム定数が存在すれば、ウラム安定性であることになるが、ウラム安定性に関連するこれまでの多くの研究では、そのウラム定数が最小であるか否かについては議論されていなかった。しかしながら、本研究では、上記の方程式たちにおいて、最良のウラム定数を導出することに成功し、近似解に付随する厳密解までも具体的に記述することを可能とする定理を得た。さらに、その定理を応用し、ある線形微分方程式に対する摂動方程式のすべての解の終局有界性を保証する定理も得ている。

ウラム安定性は1940年にS.M. Ulamが提唱した関数方程式の安定性に由来するものであり、1998年にC. Alsina and R. Gerが微分方程式のウラム安定性として新たに考案して間もない新たな安定性の指標である。近年、海外の多くの研究者が着目しており、近似解と厳密解との誤差を調査することに役立つ概念と言える。しかしながら、最良ウラム定数に着目した研究は数少なく、これに焦点を絞って研究を開始したところ、アメリカ合衆国 Concordia College の D. R. Anderson 氏から共同研究の申し入れがあり、これを受けた。共同研究の結果、様々な差分方程式、具体的には、dynamic equations on time scales, 2種の刻み幅をもつ差分方程式、h-差分方程式、Cayley h-差分方程式、ダイヤモンドアルファ差分方程式に関する研究成果を得るに至った。ここで得られた成果は、差分方程式の理論の発展に寄与するだけでなく、近似解と厳密解の近さ(精度)の最良の定数を導出することで、様々な現象を表す数理モデルへ適用可能である。

当該研究においては、フラクタル解析だけでなく、ウラム安定性に関連する多数の研究成果を得たため、更なる発展を期待して最終年度前年度申請を行った。その結果、基盤研究(C)における「ダイヤモンドアルファ差分方程式の定性的研究の新機軸」として採択されたため、本課題の最終年度分(2020年度分)の予算は廃止となったが、最終的な成果(2020年度の成果)として、2次元非線形系(準線形系を含む)の螺旋に関する有限長・無限長を判定する十分条件、または必要十分条件を得るに至り、また、一般化三角関数を用いた極座標変換で2次元半分線形系(準線形系)の摂動問題に関する精密な結果を与えることにも成功した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 11件／うち国際共著 5件／うちオープンアクセス 7件）

1. 著者名 Anderson Douglas R., Onitsuka Masakazu	4. 巻 74
2. 論文標題 Best Constant for Hyers-Ulam Stability of Second-Order h-Difference Equations with Constant Coefficients	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Results in Mathematics	6. 最初と最後の頁 1~16
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00025-019-1077-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Anderson Douglas R., Onitsuka Masakazu	4. 巻 2019
2. 論文標題 Hyers-Ulam Stability of a Discrete Diamond-Alpha Derivative Equation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Frontiers in Functional Equations and Analytic Inequalities, Springer New york	6. 最初と最後の頁 237~254
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-28950-8_14	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fukutaka Ryuma, Onitsuka Masakazu	4. 巻 11
2. 論文標題 Ulam Stability for a Class of Hill's Equations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Symmetry	6. 最初と最後の頁 1~15
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3390/sym11121483	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Fukutaka Ryuma, Onitsuka Masakazu	4. 巻 100
2. 論文標題 A necessary and sufficient condition for Hyers-Ulam stability of first-order periodic linear differential equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Applied Mathematics Letters	6. 最初と最後の頁 1~7
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aml.2019.106040	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Anderson Douglas R., Onitsuka Masakazu	4. 巻 2020
2. 論文標題 Hyers-Ulam Stability and Best Constant for Cayley h-Difference Equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society	6. 最初と最後の頁 1~16
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40840-020-00920-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Anderson Douglas R., Onitsuka Masakazu	4. 巻 51
2. 論文標題 Hyers-Ulam stability of first-order homogeneous linear dynamic equations on time scales	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Demonstratio Mathematica	6. 最初と最後の頁 198~210
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/dema-2018-0018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Anderson Douglas R., Onitsuka Masakazu	4. 巻 344-345
2. 論文標題 Hyers-Ulam stability for a discrete time scale with two step sizes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Applied Mathematics and Computation	6. 最初と最後の頁 128~140
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.amc.2018.10.014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Onitsuka Masakazu	4. 巻 90
2. 論文標題 Hyers-Ulam stability of first order linear differential equations of Caratheodory type and its application	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Applied Mathematics Letters	6. 最初と最後の頁 61~68
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aml.2018.10.013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Fukutaka Ryuma, Onitsuka Masakazu	4. 巻 473
2. 論文標題 Best constant in Hyers-Ulam stability of first-order homogeneous linear differential equations with a periodic coefficient	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 1432 ~ 1446
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2019.01.030	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Onitsuka Masakazu	4. 巻 28
2. 論文標題 Hyers-Ulam stability of second-order nonhomogeneous linear difference equations with a constant stepsize	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Computational Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 152 ~ 165
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Onitsuka Masakazu	4. 巻 330
2. 論文標題 Hyers-Ulam stability of first-order nonhomogeneous linear difference equations with a constant stepsize	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Applied Mathematics and Computation	6. 最初と最後の頁 143-151
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.amc.2018.02.036	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計23件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 M. Onitsuka
2. 発表標題 Hyers-Ulam stability for first-order linear differential equations with periodic coefficient
3. 学会等名 The 11th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 M. Onitsuka
2. 発表標題 Hyers-Ulam stability and best constant for second-order linear difference equations
3. 学会等名 The 25th International Conference on Difference Equations and Applications (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 鬼塚 政一
2. 発表標題 ダイヤモンドアルファ差分方程式のウラム安定性
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 福高 龍馬, 鬼塚 政一
2. 発表標題 Hill方程式のHyers-Ulam安定性
3. 学会等名 第六回ODE若手セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 福高 龍馬, 鬼塚 政一
2. 発表標題 Hill方程式のHyers-Ulam安定性とHUS定数
3. 学会等名 日本数学会 中国・四国支部例会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 M. Onitsuka
2. 発表標題 Best constant in Hyers-Ulam stability of first-order nonhomogeneous linear difference equations with a constant stepsize
3. 学会等名 The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 R. Fukutaka, M. Onitsuka
2. 発表標題 Hyers-Ulam stability for periodic linear differential equations of first order
3. 学会等名 Japan-China Joint Workshop on Differential and Difference Equations and Related Topics in Osaka 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 福高 龍馬, 鬼塚 政一
2. 発表標題 周期係数をもつ1階同次線形微分方程式の Hyers - Ulam 安定性と最良定数
3. 学会等名 第五回ODE若手セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 福高 龍馬, 鬼塚 政一
2. 発表標題 1階周期線形微分方程式に対する Hyers - Ulam 安定性と最小のHUS定数
3. 学会等名 日本数学会中国・四国支部例会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 板倉 健太, 鬼塚 政一, 田中 敏
2. 発表標題 2次元半分線形系の摂動について
3. 学会等名 日本数学会中国・四国支部例会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 鬼塚 政一
2. 発表標題 ダイヤモンドアルファ差分方程式におけるウラム安定性
3. 学会等名 RIMS 共同研究(グループ型)「常微分方程式の手法による非線形問題の探求」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 鬼塚 政一
2. 発表標題 Hyers-Ulam stability of second-order linear difference equations with constant coefficients
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中 敏, 鬼塚 政一
2. 発表標題 Characteristic equation for autonomous planar half-linear differential systems
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 鬼塚 政一, 田中 敏
2. 発表標題 Box dimension of solution curves for a class of two-dimensional linear differential systems
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 鬼塚 政一
2. 発表標題 1階非同次線形差分方程式の Hyers - Ulam 安定性と刻み幅の関係
3. 学会等名 RIMS 共同研究 (グループ型) 「非線形問題への常微分方程式の手法によるアプローチ」
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 眞鍋 佳菜子, 鬼塚 政一
2. 発表標題 微小な刻み幅をもつ 1 階同次線形差分方程式の Aoki - Rassias 安定性
3. 学会等名 日本数学会中国・四国支部例会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 福高 龍馬, 鬼塚 政一
2. 発表標題 変数係数をもつ 1 階非同次線形微分方程式の Hyers - Ulam 安定性
3. 学会等名 日本数学会中国・四国支部例会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 鬼塚 政一, 眞鍋 佳菜子
2. 発表標題 1階同次線形差分方程式の刻み幅が Hyers - Ulam 安定性に与える影響
3. 学会等名 第四回ODE若手セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 福高 龍馬, 鬼塚 政一
2. 発表標題 時変係数をもつ1階非同次線形微分方程式の Hyers - Ulam 安定性
3. 学会等名 第四回ODE若手セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 谷本 陽輝, 鬼塚 政一
2. 発表標題 2次元定数係数線形差分方程式系の原点の幾何学的分類
3. 学会等名 第四回ODE若手セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 M. Onitsuka
2. 発表標題 Best constant in Hyers-Ulam stability of first-order nonhomogeneous linear difference equations
3. 学会等名 Japan-China Joint Workshop on Ordinary Differential Equations and Related Topics in Osaka 2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 M. Onitsuka
2. 発表標題 On the Hyers-Ulam stability of first-order nonhomogeneous linear difference equations
3. 学会等名 The 17th International Conference on Functional Equations and Inequalities (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 M. Onitsuka
2. 発表標題 Integral Average Conditions for Oscillation of Damped Half-linear Differential Equations
3. 学会等名 International Conference on Differential & Difference Equations and Applications 2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>常微分方程式における最近の動向とその発展 http://www.xmath.ous.ac.jp/~onitsuka/workshop2019_1.html 鬼塚政一 (Onitsuka Masakazu) 研究室ホームページ https://www.xmath.ous.ac.jp/~onitsuka/</p>

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

<p>国際研究集会 RIMS Workshop Recent Trends in Ordinary Differential Equations and Their Developments</p>	<p>開催年 2019年～2019年</p>
---	----------------------------

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
米国	Concordia College	University of Arkansas at Little Rock	