1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　６ 月　９ 日現在

機関番号：１７１０２

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：１７Ｋ１４２３５

研究課題名（和文）力学系における特異的軌道の精度保証付き数値計算法の包括的理論の構築

研究課題名（英文）Development of rigorous computation methods for singular trajectories in dynamical systems

研究代表者

松江　要（Matsue, Kaname）

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・助教

研究者番号：７０６１００４６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：パラメータ摂動による特異性を有する微分方程式系、特に「多重スケール構造」を有するものの解、或いは有限時刻における発散、および不連続性の出現により解を適切に延長できなくなる「有限時間特異性」につき、力学系の観点から解を記述する標準的な方法を確立した。
また結果の厳密性と具体性の両方を担保する、数学解析、数値計算のいずれも困難な対象を明確にとらえ、様々な系に適用できる精度保証付き数値計算の方法論を提唱した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
微分方程式の解構造において特徴づけが一般に困難な「特異性」の記述につき、結果の妥当性が限られる数学的結果と数値計算の橋渡しを担う精度保証付き数値計算が、標準的な力学系の道具を用いて適用できるようになる事で、特異性も厳密性と具体性を担保しつつ計算できるようになった。また特異性がいつ生じるかを力学系の言葉で明確にし、その振る舞いを力学系と精度保証付き数値計算で追えるようになった事で、特異性発現の有無を判定する事が可能となり、その振る舞いを厳密性をもって視認する事が可能となった。これは微分方程式の解の特異性解析を容易にかつ体系的にし、信頼性のある深い考察を導く事につながる。

研究成果の概要（英文）：I have developed methodologies to describe solution structures of differential equations possessing singular perturbation nature, including "multi-scale structure", and "finite-time singularities" as a consequence of divergence or the presence of discontinuity at a finite time, from the viewpoint of dynamical systems.
Moreover, I have also developed several methodologies of rigorous numerics available for various systems possessing the above singular nature, which are usually difficult to treat both mathematically and numerically. The methodologies enable us to compute targeting trajectories with mathematical rigor and concreteness.

研究分野：力学系，数値解析，精度保証付き数値計算

キーワード：特異構造の一様評価　コンパクト化　時間スケール特異性解消　爆発レート

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

1. 研究開始当初の背景

微分方程式や写像の反復による解軌道の振る舞いを理解する事は、数理モデルによって記述される自然現象を理解するために重要な課題である。一般には、数学解析のみを用いて解の記述やその定性的振る舞い(安定性や分岐)を議論する事は非常に困難であり、数値シミュレーションによる解の観察や性質の推察を伴う事もしばしばある。より高次元、より複雑な系を扱うに従い、数値シミュレーションの需要は高まっていく。しかし、数値シミュレーションで得られる知見に数学的厳密性は無い。よって、その数学的正当性を議論する事は、現象の正しい理解と説明のためには必須である。この議論を可能にする手段の一つとして、「精度保証付き数値計算」がある。打ち切り誤差や丸め誤差を全て包含する区間演算を用いて、得られる全ての計算結果に数学的厳密性を付加する事が出来る。この計算法は線型代数の諸問題に始まり、応用として微分方程式や力学系の解の精度保証付き数値計算へとその可能性が広がっている。力学系の解軌道の精度保証付き数値計算法の研究が確立されて久しい。その多くは平衡点や時間周期解、それらの安定性や分岐など、局所的な不変集合の定性的性質の計算法の構築から始まった。その後、研究対象はホモクリニック軌道やヘテロクリニック軌道に代表されるコネクティングオービットなど、力学系の(無限時間に対する)大域的性質を支配する不変集合へシフトしていく。ごく近年では、与えられたパラメータ領域に対する大域力学系の全構造計算、また偏微分方程式などが生成する無限次元力学系において、時間遅れを含む方程式の周期解、ill-posed な偏微分方程式の解の計算など、「数値計算で、また数学的にも取り扱いが困難な問題の計算法」へと研究の流れの新たなシフトが起こっている。

この流れの中で、「数値計算ですら扱いが難しい対象」として、複数時間スケールの振る舞いが混在する「fast-slow系」、有限時刻で解の値が発散、あるいは微分が不連続になる「爆発解」「絶滅・コンパクトン・急冷解」がある。これらはパラメータの摂動で解の構造を劇的に変える「特異摂動性」、あるいは有限時刻で特異な振る舞いをする「有限時間特異性」を有しており、数値計算でさえ正しく捉えることが(特別の工夫がない限り)困難である。数学では(幾何学的)特異摂動論の発展、あるいは偏微分方程式の解の振る舞いの研究によりある程度の定性的情報を得られる。しかし、一般に与えられる具体的な系の振る舞いに関しては個々の解析に頼らざるを得ない。Fast-slow系の場合は複数時間スケールを記述するパラメータεについて、特異摂動論が成立する「充分小さいε」と数値計算が適用できる「具体的なε」のギャップを埋めることが数学、数値計算個々の適用では不可能である。有限時間特異性の場合は、数学的に得られた解に至るまでの「具体的な振る舞い」、あるいは数値的に得られた爆発解などの特異性を有する解「と思しきもの」が真に求める対象かを考えるのに、全く別のアプローチが必要となる。

精度保証付き数値計算は、上記の「数学と数値計算のギャップ」を埋める鍵となり得る。とはいえ、「構造の劇的変化」「無限大や不連続性」など、数値計算では根本的に取り扱えないもの、アイデアなしに適用すると破綻を引き起こすものを扱う必要があるため、適切に扱うための数学理論を構築するところから始めなければならない。部分的にその可能性を示唆する考察は従来の研究においてあったものの、それらは上記の困難を解決する直接の回答にはなっていないのが現状である。

2. 研究の目的

本課題の目的は、上記の特異な現象を「**多重スケール構造**」「**有限時間特異性**」を共通キーワードとし、数学的厳密性を伴う数値計算法を確立すること、またその方法論の確立を通してこれらの特異的現象に潜む数学的普遍構造を明らかにする事である。そのため、(精度保証付き)数値計算の研究としての

側面と、数学の研究としての側面があり、これらは車の両輪である。対象は主に常微分方程式のなす力学系である。偏微分方程式など無限次元系で記述される対象の場合は、進行波解など有限次元の常微分方程式のなす力学系の問題に帰着させて考察する。

精度保証付き数値計算の方法論の確立は、数学としての現象の解釈を「数値計算可能なレベルで」論じる事が必須である。そのため fast-slow 系などの「多重スケール」を伴う問題では、多重スケール構造に依らない「一様構造」の抽出、有限時間特異性の場合は「無限大」を有限の対象に帰着させる事、及び力学系理論の強みである「無限時間の振る舞い」の考察に帰着させるため、適切な「時間のスケール変換」を導入できる普遍的仕組みを作る事が肝要となる。逆にこれらを適切に導入できさえすれば、「特異性」を意識せず現象を記述する事が可能となると期待される。またそれらは精度保証付き数値計算の従来の貢献の鍵となっていた「一様評価」や「有限の対象」「無限時間の取り扱い」と親和性の高いものとなる可能性が非常に高い。

3. 研究の方法

本課題は力学系としての「特異性」の再解釈、またそれらを用いた精度保証付き数値計算法の確立を目的とする。そのため、問題を数値計算と親和性の高いものに翻訳する事が最も重要となる。精度保証付き数値計算の力学系への応用は方程式を解くことに注力する「解析的アプローチ」と、背後にある幾何学的構造に注目し、その近傍の力学系の振る舞いを記述する「位相的アプローチ」に大別されるが、本課題では「位相的アプローチ」にフォーカスし、解構造と特異性の対応関係を探る。
Fast-slow 系の場合は、近傍の性質によって解構造自身の記述を可能にする「錐」「Lyapunov 関数」「被覆関係」を基礎とし、多重時間スケールパラメータ ε の依存性を考慮せずに済む概念を提唱し、特異性のない(正則な)力学系の解析及び計算と同列に扱えるようにする。有限時間特異性の場合は「無限大」を有限の対象として扱えるようにする「コンパクト化」、および有限時間での振る舞いを無限時間の振る舞いに変換する適切な「時間スケール変換」と導入し、力学系理論が得意とする「無限時間における漸近挙動」の考察に元の問題を変換する。いずれの場合もできる限り一般の系に適用できるような道具づくりを行うところから、本研究は始まる。

4. 研究成果

Fast-slow 系においては、遅い変数が 1 次元という特別な場合に限り、「錐」「Lyapunov 関数」「被覆関係」を用いた構造の一様評価とそれによる特異摂動解，その ε -接続の精度保証付き数値計算が成功していた。次の問題は遅い変数が多次元の場合の解析である。この振る舞いを記述する事は非常に難しく、論文として形となった成果が未だ出ていないのが現状である。本期間に最初に考察したのは「slow manifold の滑らかな近傍を構成するための座標変換」の数値的導入である。Fast-slow 系の特異摂動解は $\varepsilon=0$ における平衡点の集まりである「臨界多様体」を $\varepsilon>0$ として幾何学的特異摂動させた「slow manifold」と、それらを繋ぐ軌道によって記述される。よって slow manifold の分布、その近傍の力学系の考察は fast-slow 系において必須項目となる。ただし slow manifold は一般に非線型な多様体構造を有し、実際の興味の対象となる解は slow manifold そのものの上ではなく、近くを通るため、slow manifold の近傍での解の振る舞いを陽に記述できる道具を用意しなければ、解全体を記述できない。それを容易にするのが「**座標変換**」である。Slow manifold を超平面にする適切な座標系を導入し、この近くでの力学系の陽な記述を可能にする。これは本質的に臨界多様体の構造に依存し、多様体上の点に依存して座標変換も変化する。そのため、座標変換は多様体上のベクトル束、或いはファイバー束の滑らか

な切断を導入する事に相当する。ただし、fast-slow 系の場合は多様体の上の点も動くため、座標変換はこの多様体上の力学系の情報も考慮に入れなければならない。そしてそれは一般に力学系の高階微分の情報を含む。しかし、slow manifold は（対応する臨界多様体がいくら滑らかでも）その滑らかさが担保されるかは ε の値と slow manifold の力学系的性質に依存する。そのため「slow manifold の滑らかさを担保し」、「担保された滑らかさから導かれる力学系の高階微分の情報も全て取り入れて」、座標変換を構成する必要がある。これは非常に困難を伴い、本期間では達成できなかった案件である。精度保証付き数値計算による解の記述の鍵となる一様構造の抽出はこの座標変換ができる事が前提となるので、出だしからつまずいた状況である。なお、期間中の考察では座標変換が時間に依存する事を見落としていた。力学系において典型的な考察の対象となる「系の(時間に依らない)パラメータ族」であれば完成に至ったのだが、「パラメータが ε >0 で時間に依存する変数となる」という fast-slow 系独自の困難に嵌ってしまった。

他方で、ε -依存性を考慮した全スケールの力学系における不変集合、特に平衡点の安定性やその近くの解の漸近挙動も、fast-slow 系では困難を伴う対象となっている。これは ε が 0 かそうでないかで、振る舞いが全く異なるからである。数学で明確に区別される「ほぼ 0」と「0」が数値計算では区別できないため、非常に小さい(しかし 0 でない) ε における力学系の構造を明確に、かつ一様に記述するには特別の工夫が必要となる。同時期、デルフト工科大学の Aleksander Czechowski 氏により特異構造を意識した位相的道具である「**ε -錐**」の概念が提唱され、これを使うと（低次元系では） ε の大きさに依存しない一様な力学系の漸近挙動の評価ができる事が主張された。Czechowski 氏との共同研究により、これを用いて一般次元の系でも ε -錐は明確に特異摂動力学系の平衡点近傍の解の漸近挙動を記述できる事、また平衡点そのものの安定性も、ε -錐の構成法から自然に(精度保証付き数値計算に適用できる形で)検証できる事を示した。この成果は氏との共同研究として、現在取りまとめ中である。

次に「有限時間特異性」、特に爆発解の考察における研究成果について。重要なのは問題の適切な設定、およびそれに伴う適切な道具の選択或いは構築である。先行研究でも爆発解の力学系的考察は少しばかり存在したが、それらのほとんどは無限遠方で「ほぼ斉次」なスケール性を仮定したものである。成分によってスケール性が異なる場合、これらのアプローチは誤った情報を提供し得る。そこで、成分によるスケール性の違い(擬斉次性)を許し、無限遠方で「ほぼ擬斉次」な方程式のクラスである「**漸近的擬斉次性**」を提案し、さらにこのクラスの方程式、或いは微分方程式を生成するベクトル場にマッチし、無限大の情報を有限領域におけるそれに還元する「**擬ポアンカレコンパクト化**」「**大域的擬斉次コンパクト化**」を提唱した。この定義は、有限時間特異性を無限時間での解の振る舞いを適切に記述する「**時間スケール特異性解消**」の一様な(すなわち、成分に依存しない)導入を可能にする。これらの概念の導入により、爆発解は無限遠(コンパクト化後の集合の境界に対応し、「**地平線**」と呼ぶ)における力学系の不変集合への安定多様体上の軌道として記述され得る事が示された。また地平線上の不変集合の安定性、特に双曲性と呼ばれる普遍的な構造を担保すると、その安定多様体上の解は必ず元の系における爆発解になる事を証明した。さらに典型的に見られる爆発解は、地平線上の平衡点への漸近に対応する事をみた。力学系の観点からは平衡点以外の不変集合への漸近を考えるのも自然であり、その観点から周期軌道への漸近に対応する爆発解（周期爆発或いは振動爆発）の記述も自然にできる事を示した。これらの結果を援用し、従来の研究にあった時間大域解の検証に適切な時間スケール逆変換の評価を加える事で、精度保証付き数値計算で爆発解の具体的な形と、爆発時刻の厳密評価を数値計算できる事を示した。加えて、従来の研究では（擬斉次な場合も含めて）よく用いられた「方向依存するコンパクト化」を「**指向的コンパクト化**」としてまとめ、大域的・指向的どちらのコンパクト化を用いても爆発解としての位相的特性は変わらない事も示し、(適切な設定のもとで)状況に応じて好きなコンパク

ト化を選んで爆発解の考察ができる事を提唱した。
これに続く考察として、爆発解の漸近挙動の幾何学的・力学系的解釈を行った。爆発解などの漸近挙動には、ベクトル場の形からその振る舞いが決まる「タイプＩ型」と、ベクトル場の形から一概に振る舞いを決められない「タイプⅡ型」に（少なくとも偏微分方程式における用語を踏襲すると）大別される。先の結果は「地平線上不変集合の双曲性」が「タイプＩ型」爆発に対応することも示している。自然な疑問として、「地平線上不変集合の双曲性が担保されない時に、発散する解の振る舞いはどうなるか」が生じる。本期間での研究において、地平線上の不変集合の中心多様体上の解の振る舞いを陽に書き下す事で、爆発解の漸近挙動、いわゆる爆発レートが記述できる事を提唱した。そして多くの場合タイプⅡ型になり、また爆発に無限時間かかる例も示す事ができた。先行研究においてもタイプⅡ型の爆発は例が限られており、それが生じる一般メカニズムが不明であったが、今回力学系的アプローチを加える事で、「タイプⅡ型の爆発は地平線上の不変集合の中心多様体上の解と対応し得る」事を提唱した。
　また一連の考察は他の有限時間特異性：「絶滅・コンパクトン・急冷」にも当てはまる。さらに同様のアイデアを「指数関数非線型性」にも適用し、その爆発解の精度保証付き数値計算と爆発レートを計算する方法を確立する事にも成功した。
一般の有限時間特異性というカテゴリーの特異な解の振る舞い、特にその存在と漸近挙動およびその精度保証付き数値計算法を、常微分方程式のなす力学系から明らかにしたのが本期間における有限時間特異性の研究である。爆発解の精度保証付き数値計算は、筑波大学の高安亮紀氏の共同研究に基づく成果である事も付け加えておく。

Fast-slow 系・有限時間特異性の考察に関連する研究については、3 年間で計 5 本の論文と 2 本の論説を世に送り出す事ができた。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計8件（うち査読付論文　8件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Kaname Matsue, Leo Matsuoka, Osamu Ogurisu and Etsuo Segawa	４．巻 6
２．論文標題 Resonant-tunneling in discrete-time quantum walk	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Quantum Studies: Mathematics and Foundations	６．最初と最後の頁 35-44
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/2Fs40509-017-0151-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kaname Matsue	４．巻 17
２．論文標題 On Blow-Up Solutions of Differential Equations with Poincare-Type Compactifications	５．発行年 2018年
３．雑誌名 SIAM Journal on Applied Dynamical Systems	６．最初と最後の頁 2249-2288
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1137/17M1124498	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 松江　要	４．巻 37
２．論文標題 微分方程式の爆発解：精度保証付き数値計算と力学系的解釈	５．発行年 2018年
３．雑誌名 日本シミュレーション学会誌「シミュレーション」	６．最初と最後の頁 188-196
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 松江　要	４．巻 71
２．論文標題 Fast-slow系における精度保証付き数値計算	５．発行年 2019年
３．雑誌名 「数学」（日本数学会編集）	６．最初と最後の頁 1-30
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kaname Matsue	4．巻 50
2．論文標題 Rigorous numerics for fast-slow systems with one-dimensional slow variable: topological shadowing approach	5．発行年 2017年
3．雑誌名 Topological Methods in Nonlinear Analysis	6．最初と最後の頁 357-468
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） doi=http://dx.doi.org/10.12775/TMNA.2016.072	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kaname Matsue	4．巻 267
2．論文標題 Geometric treatments and a common mechanism in finite-time singularities for autonomous ODEs	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Journal of Differential Equations	6．最初と最後の頁 7313-7368
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.07.022	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kaname Matsue, Akitoshi Takayasu	4．巻 374
2．論文標題 Rigorous numerics of blow-up solutions for ODEs with exponential nonlinearity	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Journal of Computational and Applied Mathematics	6．最初と最後の頁 112607
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112607	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kaname Matsue, Akitoshi Takayasu	4．巻 -
2．論文標題 Numerical validation of blow-up solutions with quasi-homogeneous compactifications	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Numerische Mathematik	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00211-020-01125-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計11件（うち招待講演　2件／うち国際学会　4件）

1．発表者名
松江　要

2．発表標題
数学・数理科学的アプローチの可能性：予混合火炎のモデル方程式を例に

3．学会等名
公益社団法人自動車技術会2018年春季大会

4．発表年
2018年

1．発表者名
Kaname Matsue

2．発表標題
Finite-time singularity for ODEs from the viewpoint of dynamical systems

3．学会等名
EASIAM 2018（国際学会）

4．発表年
2018年

1．発表者名
Kaname Matsue

2．発表標題
Rigorous numerics of finite-time singularity for ODEs

3．学会等名
EASIAM 2018（国際学会）

4．発表年
2018年

1．発表者名
松江　要，高安　亮紀

2．発表標題
微分方程式の爆発解の精度保証付き数値計算：ケーススタディ --- 指数関数非線型項を持つ場合

3．学会等名
日本応用数理学会2018年度年会

4．発表年
2018年

１．発表者名 Kaname Matsue
２．発表標題 Rigorous numerics and asymptotic analysis of finite-time singularities : qualitative and quantitative natures
３．学会等名 SCAN 2018（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 松江　要
２．発表標題 有限進行波の精度保証付き数値計算
３．学会等名 日本応用数理学会2017年度年会
４．発表年 2017年

１．発表者名 松江　要
２．発表標題 サドルが紡ぐ縁 -えにし- ： 精度保証付き数値計算と力学系
３．学会等名 日本数学会2017年度秋季総合分科会（応用数学）（招待講演）
４．発表年 2017年

１．発表者名 Kaname Matsue
２．発表標題 Rigorous numerics of blow-up solutions for autonomous ODEs
３．学会等名 A3 workshop on Fluid Dynamics and Materials Science in CSIAM (China SIAM) 2017（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2017年

1．発表者名 松江　要
2．発表標題 絶滅・コンパクトン進行波 - 精度保証付き数値計算からその先へ
3．学会等名 2017年度応用数学合同研究集会
4．発表年 2017年

1．発表者名 松江　要
2．発表標題 無限遠ダイナミクスが導く解の爆発レート
3．学会等名 日本数学会2018年度年会（応用数学）
4．発表年 2018年

1．発表者名 松江　要
2．発表標題 速いレートで振る舞う振動爆発解と，振動発散解
3．学会等名 日本数学会2018年度年会（応用数学）
4．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Prof. Moshe Matalon
https://mechanical.illinois.edu/directory/profile/matalon
Dr. Robert Laister
https://people.uwe.ac.uk/Person/RobertLaister
Prof. Petros Sofronis
https://mechanical.illinois.edu/directory/profile/sofronis

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考