

令和 3 年 6 月 21 日現在

機関番号：17201

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K17948

研究課題名(和文) 発展方程式の解に対する指数関数行列を用いた精度保証付き数値計算法

研究課題名(英文) Numerical verification method of solutions for evolutionary equations by applying the matrix exponential

研究代表者

木村 拓馬 (Kimura, Takuma)

佐賀大学・理工学部・准教授

研究者番号：60581618

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,294,040円

研究成果の概要(和文)：

本研究の目的は、発展方程式の解の存在範囲もしくは一意存在の範囲を特定する精度保証付き数値計算法の開発である。解の存在を示し数値解の誤差を厳密評価することで解の存在範囲を特定することができる。主に放物型偏微分方程式を対象とし、空間方向は有限要素近似における誤差評価を、時間方向は行列指数関数を用いて表される基本解の厳密計算による補間誤差を評価することで、初期値境界値問題や周期境界値問題に対する精度保証付き数値計算法を導出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

計算機を用いた数値計算は非常に有用であるが、一般に、そこで得られる数値解は誤差を含む。そのため、数値解の精度を厳密に保証できる数値計算法が近年活発に研究されている。本研究の主な成果は、いくつかの条件を整えば発展方程式の数値解に対する誤差評価を与えるというものであり、与えられた問題の解の存在範囲もしくは一意存在の範囲を計算機を用いて自動的に求める精度保証付き数値計算法の開発に寄与する成果といえる。

研究成果の概要(英文)：

In this research, we studied some numerical verification methods for a full discrete solution of the evolutionary partial differential equations. Proposed methods are based on the error estimates of finite element semidiscretization in space direction combined with an interpolation in time that uses the fundamental solution (represented by the exponential of matrix) for the semidiscretized problem.

研究分野：数値解析

キーワード：精度保証付き数値計算法 微分方程式 有限要素法 発展方程式 数値計算

1. 研究開始当初の背景

計算機を用いた数値計算は非常に有用であるが、一般に、そこで得られる数値解は誤差を含み、計算の手順が複雑になるほどに誤差が積み重なり大きくなる可能性がある。そこで、「与えられた問題の解の存在範囲もしくは一意存在の範囲を丸め誤差の厳密評価を含めて特定する」精度保証付き数値計算法が近年活発に研究されている。有限次元の等式問題などに関する精度保証付き数値計算法は実用の域に達しつつあり、微分方程式等の無限次元問題への応用的な研究も進められている。

本研究の主な対象である放物型偏微分方程式については、有限要素法を基礎とした「中尾の方法」や半群法を基礎とした手法の適用例が知られているが、その汎用性に関しては十分とはいえず、決定的といえる精度保証付き数値計算法は未だ開発されていない。そのような状況において、研究代表者は放物型偏微分方程式の初期値境界値問題に対し、時間方向・空間方向ともに有限要素法を用いた数値解に対する中尾の方法を提案してきた。また、このような手法は時間方向に「硬い」方程式となる例には適用が困難であったため、研究代表者は空間方向にガレルキン法を適用して得られる常微分方程式系の初期値問題に精度保証付き行列指数関数を用いた補間を行うことで時間方向の硬さに対処できる手法についても研究を進めてきた。

2. 研究の目的

本研究は、発展方程式の“厳密解”の存在範囲もしくは一意存在の範囲を、計算機を用いて自動的に求める精度保証付き数値計算法の開発を目的とするものである。特に放物型偏微分方程式の初期値境界値問題と周期境界値問題を対象とし、上述のように指数関数行列を用いた補間を行うような精度保証付き数値計算法について、その適用範囲を拡大するとともに、計算精度の向上を目指す。具体的には、以下の2つを到達目標とする。

- (1) 非線形放物型偏微分方程式の初期値境界値問題に対する解の存在証明と数値解の誤差評価法を導出する
- (2) 放物型偏微分方程式の時間周期解に対する解の存在証明の例を示す

研究においては、理論構築だけでなく計算機を用いた計算方法についても検討し、高精度かつ少ない計算量・記憶領域量で精度保証付き数値計算できるような効率的な数値計算法の開発を目指す。

3. 研究の方法

まずは基礎研究として線形方程式を対象とし、その成果を基に非線形方程式について検討する。当初の計画では、まず基礎研究として線形方程式に対する高精度誤差評価を導出したのちに非線形問題への応用を検討し、最終的には時間周期解について検討する、という順序での研究を計画していたが、非線形問題への応用について成果を出す前に周期解についての共同研究が進んだためこれを先行した。なお、非線形方程式の周期境界値問題については、簡単な例であるが行列指数関数を用いた補間についての誤差評価がうまく適用できない例があり、さらなる研究が必要となっている。

基本的な線形方程式については解の存在証明がすでに得られている場合が多くあり、その場合は数値解との誤差評価を考えればよい。この場合は、研究代表者がこれまでの研究で得た知見をもとに、近似解を挟んだ三角不等式や近似作用素のノルム評価など各種の不等式を列挙し、それらを組み合わせることで構成的誤差評価を導出した。線形放物型偏微分方程式の初期値境界値問題に対しては、既知の手法ではパラメータの取り方によっては実際の誤差と誤差評価とのオーダーが異なるような誤差評価となっていたため、解の滑らかさに関する仮定などを加えてこれまでの提案手法を見直すことで、より良いオーダーとなる誤差評価を導出できるように改

良を行った．このような誤差評価の導出は本研究課題のうち高精度化についての根幹となり得るものであり，その応用によって非線形問題や周期解についても高精度な手法の導出が期待できる．線形放物型偏微分方程式の周期境界値問題に対しては，周期条件をみたく特別な初期値問題を考えることで初期値境界値問題に対する手法を応用・拡張し，誤差評価式を導出した．また，初期値問題の応用・拡張としてではない誤差評価式の検討も行った．さらに，初期値に対する評価と初期値問題に対する手法とを検討し組み合わせることで，ある時刻における誤差のノルム評価という意味での pointwise な誤差評価式についても検討した．

研究の各段階において適宜に数値実験を行うことで，計算精度など手法の有用性についての確認を行った．数値実験の結果を理論構築にフィードバックし，計算機への実装をも考慮した実用的・効率的な理論構築を行った．

4．研究成果

以下の成果が得られた．

- (1) 線形放物型偏微分方程式の初期値境界値問題に対して，解の滑らかさに関する仮定を加えてこれまでの提案手法を改良することにより，実際の誤差と誤差評価式とのオーダーが同じという意味で最良オーダーな事前誤差評価を導出した．この成果については，論文 1 編が国際的な査読付き学術誌 *Reliable Computing* に掲載された．
- (2) 線形放物型偏微分方程式の初期値境界値問題について，これは中村学園大学の橋本弘治氏の研究成果が主であるが，行列指数関数を用いた近似解を挟む三角不等式によって，時間方向・空間方向ともに有限要素法を用いた数値解に対する誤差評価式を導出した．この成果について，共著論文 1 篇が国際的な査読付き学術誌 *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics* に掲載された．
- (3) 線形放物型偏微分方程式の周期境界値問題について，初期値境界値問題に対する手法の応用・拡張によって，周期が既知のときの数値解に対する誤差評価法を導出した．2 種類のノルムについて誤差評価式を導出し，それらが時間方向の刻み幅を空間方向の刻み幅の 2 乗にとったときに実際の誤差と誤差評価式とのオーダーが同じという意味で最良オーダーな誤差評価であることを確認するとともに，計算機による数値計算例を用意した．この成果について，国際的な査読付き研究集会 *International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Verified Numerical Computations* で発表し，また論文 1 編が国際的な査読付き学術誌 *Journal of Computational and Applied Mathematics* に掲載された．
- (4) 線形放物型偏微分方程式の周期境界値問題について，初期値問題の応用・拡張としてではなく周期条件として定式化を行うことで，これまでの成果よりもシンプルあり理論的に高精度な事前誤差評価法を導出した．さらに，初期値に対する評価と初期値問題に対する手法とを組み合わせることで，ある時刻における誤差のノルム評価という意味での pointwise な誤差評価式を導出した．これらの成果について，国内の研究集会で発表し，論文 1 篇を国際的な査読付き学術誌に投稿した．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Hashimoto Kouji, Kimura Takuma, Minamoto Teruya, Nakao Mitsuhiro T.	4. 巻 36
2. 論文標題 Constructive error analysis of a full-discrete finite element method for the heat equation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 777 ~ 790
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-019-00362-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kimura Takuma, Minamoto Teruya, Nakao Mitsuhiro T.	4. 巻 368
2. 論文標題 Constructive error estimates for full discrete approximation of periodic solution for heat equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Computational and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 未定
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cam.2019.112510	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takuma Kimura, Teruya Minamoto, and Mitsuhiro T. Nakao	4. 巻 25
2. 論文標題 Optimal Order Constructive a Priori Error Estimates for a Full Discrete Approximation of the Heat Equation	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Reliable Computing	6. 最初と最後の頁 202-212
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 0件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 木村 拓馬, 皆本 晃弥, 中尾 充宏
2. 発表標題 線形熱方程式の時間周期解に対する近似解の事前誤差評価について
3. 学会等名 第3回 精度保証付き数値計算の実問題への応用研究会 (NVR 2019)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuma Kimura, Teruya Minamoto and Mitsuhiro T. Nakao
2. 発表標題 On the constructive error estimates of a full discrete approximation for time-periodic solution of the heat equations
3. 学会等名 The 18th International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Verified Numerical Computations (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 木村 拓馬, 皆本 晃弥, 中尾 充宏
2. 発表標題 線形熱方程式の時間周期解に対する近似解の誤差評価について
3. 学会等名 第2回 精度保証付き数値計算の実問題への応用研究集会 (NVR 2018)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------